

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

- 5.1 Sistemas de ecuaciones lineales; introducción
- 5.2 Solución de sistemas de ecuaciones lineales I
- 5.3 Solución de sistemas de ecuaciones lineales II
- 5.4 Matrices
- 5.5 Multiplicación de matrices
- 5.6 La inversa de una matriz cuadrada

Las ecuaciones lineales en dos variables analizadas en el capítulo 2 se extienden y se pueden emplear en casos que comprenden más de dos variables; por ejemplo, una ecuación lineal en tres variables representa un plano en el espacio tridimensional. En este capítulo se verá que algunos problemas del mundo real se pueden formular en términos de sistemas de ecuaciones lineales y se desarrollarán dos métodos para resolver estas ecuaciones.

También se estudiará la forma en que las *matrices* (arreglos rectangulares de números) son útiles para escribir los sistemas de ecuaciones lineales en forma compacta; luego se considerarán algunas de sus aplicaciones al mundo real.

5.1

Sistemas de ecuaciones lineales; introducción

sistemas de ecuaciones

Recuérdese que en la sección 2.4 hubo que resolver dos ecuaciones lineales simultáneas para determinar el *punto de equilibrio*. Son dos ejemplos en que hay que resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos o más variables para solucionar un problema del mundo real. En este capítulo se estudiarán de manera más sistemática tales sistemas.

Primero, considérese un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables. Recuérdese que tal sistema se puede escribir en la forma general

$$ax + by = h$$

$$cx + dy = k \quad (I)$$

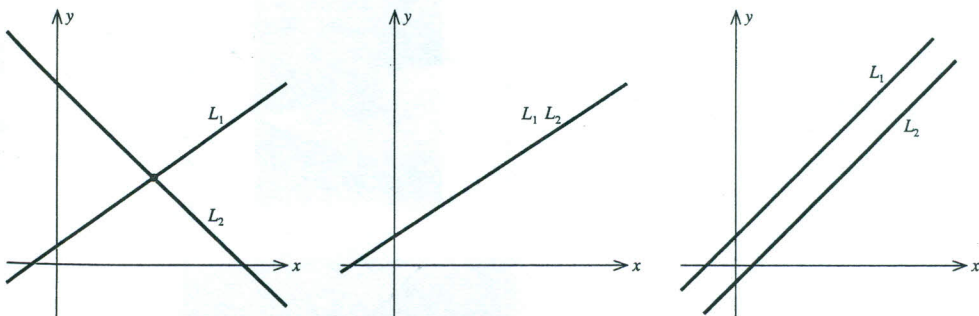
donde a, b, c, d, h y k son constantes reales y ni a y b ni c y d son ambas cero.

Ahora se estudiará la naturaleza de la solución de un sistema de ecuaciones con más detalle. Recuérdese que la gráfica de cada ecuación en (1) es una línea recta en el plano de modo que, geométricamente, la solución del sistema es el punto (o puntos) de intersección de las dos líneas rectas L_1 y L_2 , representadas por la primera y segunda ecuaciones del sistema.

La figura 1 muestra los tres casos posibles. Las dos rectas L_1 y L_2 pueden:

- Intersecarse en exactamente un punto
- Ser paralelas y coincidentes
- Ser paralelas y distintas

FIGURA 1



(a) Una única solución

(b) Una infinidad de soluciones

(c) Sin solución

Obsérvese que uno y sólo uno de estos casos debe ocurrir. En el primero, el sistema tiene una solución única correspondiente al único punto de intersección de las dos rectas. En el segundo, el sistema posee una infinidad de soluciones correspondientes a los puntos que están en ambas rectas al mismo tiempo. Por último, en el tercer caso el sistema carece de solución, puesto que las dos rectas no se intersecan.

Se ilustrará cada una de estas posibilidades con algunos ejemplos específicos.

1. Un sistema de ecuaciones con exactamente una solución

Considérese el sistema

$$2x - y = 1$$

$$3x + 2y = 12$$

Al despejar a y en términos de x en la primera ecuación, se obtiene

$$y = 2x - 1$$

Al sustituir esta expresión para y en la segunda ecuación, se tiene

$$3x + 2(2x - 1) = 12$$

$$3x + 4x - 2 = 12$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

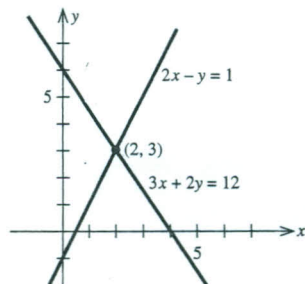
Por último, al sustituir este valor de x en la expresión obtenida para x resulta

$$y = 2(2) - 1 = 3$$

Por lo tanto, la única solución del sistema está dada por $x = 2$ y $y = 3$. Geométricamente, las dos rectas representadas por las dos ecuaciones lineales que conforman el sistema se intersecan en el punto $(2, 3)$ (Fig. 2).

FIGURA 2

Un sistema de ecuaciones con una solución



OBSERVACIÓN Se puede confirmar este resultado sustituyendo los valores $x = 2$ y $y = 3$ en la ecuación. Así,

$$2(2) - (3) = 1 \quad \checkmark$$

$$3(2) + 2(3) = 12 \quad \checkmark$$

Desde el punto de vista geométrico, se ha comprobado que el punto $(2, 3)$ está en ambas rectas. □

2. Un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones

Considérese el sistema

$$2x - y = 1$$

$$6x - 3y = 3$$

Al despejar a y en términos de x en la primera ecuación, se obtiene

$$y = 2x - 1$$

Al sustituir esta expresión para y en la segunda ecuación, se tiene

$$6x - 3(2x - 1) = 3$$

$$6x - 6x + 3 = 3$$

o

$$0 = 0$$

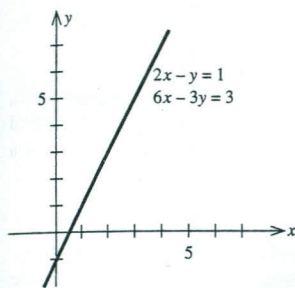
Este resultado dice que la segunda ecuación equivale a la primera. (Para ver esto, basta multiplicar ambos lados de la primera ecuación por 3.) Estos cálculos revelan

que el sistema de dos ecuaciones equivalen a una única ecuación, $2x - y = 1$. Así, cualquier par ordenado de números (x, y) que satisfaga la ecuación $2x - y = 1$ (o bien $y = 2x - 1$) constituye una solución del sistema.

En particular, al asignar el valor t a x , donde t es cualquier número real, se tiene que $y = 2t - 1$, de modo que el par ordenado $(t, 2t - 1)$ es una solución del sistema. La variable t es un **parámetro**; por ejemplo, al hacer $t = 0$ se obtiene el punto $(0, -1)$ como solución, y al hacer $t = 1$ el punto $(1, 1)$ es otra solución del sistema. Puesto que t representa cualquier número real, existe una infinidad de soluciones del sistema. En términos geométricos, las dos ecuaciones del sistema representan la misma recta, y todas las soluciones del sistema son puntos sobre la recta (Fig. 3). Tal sistema es **dependiente**.

FIGURA 3

Un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones; cualquier punto sobre la recta es una solución



3. Un sistema de ecuaciones que no tiene solución

Considérese el sistema

$$2x - y = 1$$

$$6x - 3y = 12$$

La primera ecuación es equivalente a $y = 2x - 1$. Al sustituir esta expresión para y en la segunda ecuación se tiene

$$6x - 3(2x - 1) = 12$$

$$6x - 6x + 3 = 12$$

o

$$0 = 9$$

lo cual es imposible. Así, no existen soluciones del sistema de ecuaciones. Para interpretar esta situación a nivel geométrico, se escriben ambas ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, con lo que se obtiene

$$y = 2x - 1$$

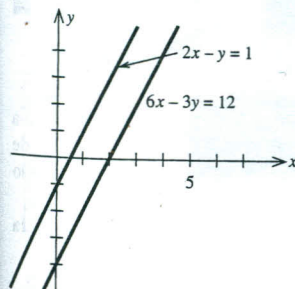
y

$$y = 2x - 4$$

Aquí se ve que las rectas representadas por estas ecuaciones son paralelas (ambas tienen pendiente 2) y distintas, ya que la primera tiene ordenada al origen -1 y la segunda tiene ordenada al origen -4 (Fig. 4). Los sistemas que no tienen solución, como éste, se llaman **inconsistentes**.

FIGURA 4

Un sistema de ecuaciones sin solución



OBSERVACIÓN Aquí se utilizó el método de sustitución para resolver cada uno de estos sistemas. Si el lector está familiarizado con el método de eliminación, tal vez quiera volver a resolver estos sistemas mediante este método. El método de eliminación se estudiará con detalle en la sección 5.2. □

Aplicación

En la sección 2.4 se presentaron algunas aplicaciones reales de los sistemas que comprenden dos ecuaciones lineales en dos variables. He aquí un ejemplo que comprende un sistema de ecuaciones lineales en tres variables.

EJEMPLO 1 La compañía de novedades As quiere producir tres tipos de recuerdos: los tipos A, B y C. Para fabricar un recuerdo tipo A se necesitan dos minutos en la máquina I, un minuto en la máquina II y dos minutos en la máquina III; un recuerdo o souvenir tipo B, un minuto en la máquina I, tres minutos en la II y uno en la III; y

un recuerdo de tipo C, un minuto en la máquina I y dos minutos en cada una de las máquinas II y III. Hay tres horas disponibles en la máquina I, cinco horas disponibles en la máquina II y cuatro horas en la máquina III para procesar un pedido. ¿Cuántos recuerdos de cada tipo debe fabricar la compañía para utilizar todo el tiempo disponible? Formular el problema (pero no resolverlo).

Solución La información dada se puede tabular como sigue:

	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tiempo disponible
Máquina I	2	1	1	180
Máquina II	1	3	2	300
Máquina III	2	1	2	240

Hay que hallar la cantidad de cada uno de los *tres* tipos de recuerdos por fabricar. Así, sean x , y y z las cantidades respectivas de recuerdos tipo A, B y C. La cantidad total de tiempo de uso de la máquina I está dada por $2x + y + z$ minutos y debe ser igual a 180 minutos. Esto conduce a la ecuación

$$2x + y + z = 180 \quad \text{Tiempo de uso de la máquina I}$$

Consideraciones similares sobre el uso de las máquinas II y III llevan a las ecuaciones:

$$x + 3y + 2z = 300 \quad \text{Tiempo de uso de la máquina II}$$

$$2x + y + 2z = 240 \quad \text{Tiempo de uso de la máquina III}$$

Puesto que las variables x , y y z deben satisfacer en forma simultánea las tres condiciones representadas por las tres ecuaciones, la solución del problema se determina resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + y + z = 180$$

$$x + 3y + 2z = 300$$

$$2x + y + 2z = 240$$

Soluciones de sistemas de ecuaciones

Más tarde se concluirá la solución del problema planteado en el ejemplo 1 (página 203); por el momento sólo se verá la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales similar al sistema del ejemplo 1, a fin de obtener un poco de sentido sobre la naturaleza de la solución.

Un sistema lineal formado por tres ecuaciones en tres variables x , y y z tiene la forma general

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

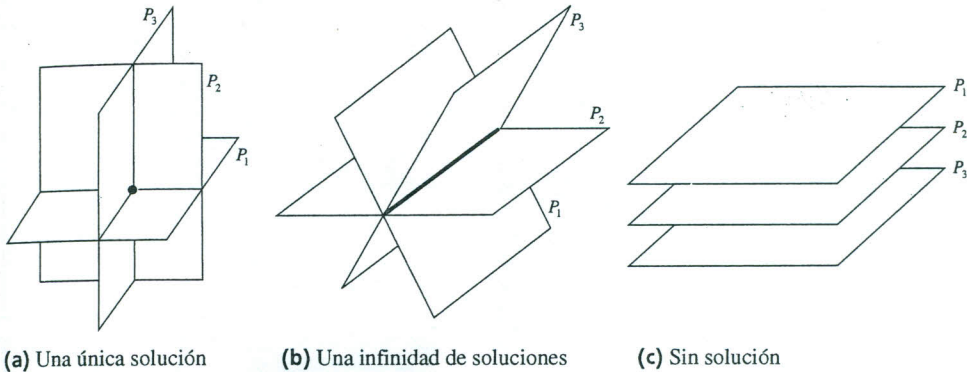
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

(2)

Así como una ecuación lineal en dos variables representa una línea recta en el plano, se puede mostrar que una ecuación lineal $ax + by + cz = d$ (donde a , b y c son nulas en forma simultánea) con tres variables representa un plano en el espacio tridimensional. Así, cada ecuación del sistema (2) representa un *plano* en el espacio tridimensional y la *solución* (o *soluciones*) del sistema es el punto (o puntos) de intersección de los tres planos definidos mediante las tres ecuaciones lineales que conforman al sistema. Como antes, el sistema tiene una y sólo una solución, una infinidad de soluciones o ninguna, según la forma en que se intersequen los planos. La figura 5 ilustra cada una de estas posibilidades.

FIGURA 5



En la figura 5a, los tres planos se intersecan en un punto correspondiente a la situación en que el sistema (2) tiene una única solución. La figura 5b muestra la situación en la que existe una infinidad de soluciones del sistema, en cuyo caso los tres planos se intersecan a lo largo de una recta y las soluciones se representan mediante la infinidad de puntos que están en esta recta; en la figura 5c, los tres planos son paralelos y distintos, de modo que no existe un punto común a los tres planos y el sistema (2) no tiene soluciones.

OBSERVACIÓN Las situaciones que aparecen en la figura 5 no son las únicas. El lector puede considerar otras orientaciones de los tres planos que ilustren las tres posibilidades al resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables. □

Ecuación lineal en n variables

Una ecuación lineal en n variables x_1, x_2, \dots, x_n es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n (no todas cero) y c son constantes.

Por ejemplo, la ecuación

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 8$$

es una ecuación lineal en las cuatro variables x_1, x_2, x_3 y x_4 .

Cuando el número de variables que abarca en una ecuación lineal es mayor de tres, ya no se dispone de la interpretación geométrica existente para los espacios de dimensión baja. Sin importar lo anterior, los conceptos algebraicos de los espacios de dimensión baja se generalizan a mayores dimensiones. Por esta razón, una ecuación lineal en n variables $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, donde a_1, a_2, \dots, a_n son todas cero, se conoce como *hiperplano n -dimensional*. La solución (o soluciones) de un sistema con un número finito de ecuaciones lineales de este tipo se puede interpretar como el *punto (o puntos) de intersección* de los hiperplanos definidos por las ecuaciones que conforman al sistema. Al igual que en el caso de los sistemas con dos o tres variables, se puede mostrar que sólo existen tres posibilidades con respecto de la naturaleza de la solución de tal sistema: a) *una solución única*, b) *una infinidad de soluciones* y c) *ninguna solución*.

Ejercicios de autoevaluación 5.1

1. Determine si el sistema de ecuaciones lineales

$$2x - 3y = 12$$

$$x + 2y = 6$$

tiene a) una solución única, b) una infinidad de soluciones o c) ninguna. Dé todas las soluciones existentes. Grafique el conjunto de rectas descrito por el sistema.

2. Un agricultor tiene un terreno de 200 acres adecuado para tres tipos de cultivo, A, B y C. El costo respectivo por acre de los cultivos A, B y C es de \$40, \$60 y \$80. El agricultor dispone de \$12 600 para el cultivo. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de trabajo; cada acre del cultivo B, 25 horas de trabajo, y cada acre del cultivo C, 40 horas. El agricultor tiene un máximo de 5950 horas de trabajo disponibles. Si desea utilizar toda la tierra cultivable, todo su presupuesto y toda la mano de obra disponibles, ¿cuántos acres de cada cultivo debe plantar? Formule el problema (pero no lo resuelva).

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.1 aparecen en la página 192.

5.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1-12, determine si cada sistema de ecuaciones tiene a) una y sólo una solución, b) una infinidad de soluciones o c) ninguna solución. Dé todas las soluciones, cuando éstas existan.

1. $x - 3y = -1$
 $4x + 3y = 11$

3. $x + 4y = 7$
 $\frac{1}{2}x + 2y = 5$

5. $x + 2y = 7$
 $2x - y = 4$

2. $2x - 4y = 5$
 $3x + 2y = 6$

4. $3x - 4y = 7$
 $9x - 12y = 14$

6. $\frac{3}{2}x - 2y = 4$
 $x + \frac{1}{3}y = 2$

7. $2x - 5y = 10$

$6x - 15y = 30$

9. $4x - 5y = 14$

$2x + 3y = -4$

11. $2x - 3y = 6$

$6x - 9y = 12$

13. Encuentre el valor de k para el cual el sistema de ecuaciones lineales

$2x - y = 3$

$4x + ky = 4$

no tiene soluciones.

8. $5x - 6y = 8$

$10x - 12y = 16$

10. $\frac{5}{4}x - \frac{2}{3}y = 3$

$\frac{1}{4}x + \frac{5}{3}y = 6$

12. $\frac{2}{3}x + y = 5$

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = \frac{15}{4}$

14. Halle el valor de k para el cual el sistema de ecuaciones lineales

$$3x + 4y = 12$$

$$x + ky = 4$$

tiene una infinidad de soluciones y halle todas las soluciones correspondientes al valor de k .

En los ejercicios 15-25, formule el problema pero no lo resuelva. En la siguiente sección tendrá que resolver estos problemas.

15. **Agricultura** La granja Johnson tiene 500 acres de terreno destinados al cultivo de maíz y trigo. El costo respectivo de los cultivos (incluyendo semillas y mano de obra) es de \$42 y \$30 por acre. El señor Johnson dispone de \$18 600 para realizar este cultivo. Si desea utilizar toda la tierra destinada a estos cultivos y todo el presupuesto correspondiente, ¿cuántos acres debe plantar de cada cultivo?

16. **Inversiones** Miguel tiene un total de \$2000 depositado en dos instituciones de ahorro. Una paga un interés simple con una tasa de 6% por año, y la otra, un interés simple con la tasa de 8% por año. Si Miguel ganó un total de \$144 por concepto de intereses durante un solo año, ¿cuánto dinero tiene depositado en cada institución?

17. **Mezclas** La tienda Coffee Shoppe vende una mezcla de café formada por dos tipos, uno con un costo de \$2.50 la libra y el otro \$3 la libra. Si el café de la mezcla se vende a \$2.80, ¿cuál es la cantidad de cada café utilizada para obtener la mezcla deseada? [Sugerencia: Suponga que el peso del café mezclado es 100 libras.]

18. **Inversiones** Isis tiene un total de \$30 000 invertidos en dos tipos de bonos que producen 8% y 10% de interés simple por año, respectivamente. Si los intereses anuales que recibe suman \$2 640, ¿cuánto dinero ha invertido en cada bono?

19. **Transporte** El número total de pasajeros matutinos de cierta línea de autobuses urbanos es de 1000. Si el pasaje de niño cuesta 25 centavos, el de adulto 75 centavos y el ingreso total obtenido del cobro de los pasajes es de \$650, ¿cuántos niños y cuántos adultos utilizaron el autobús en la mañana?

20. **Bienes raíces** Carrizal y asociados, empresa de bienes raíces, planea construir un nuevo conjunto habitacional con suites de una recámara y dúplex de dos y tres recámaras. Se ha planeado construir un total de 192

unidades y la cantidad de dúplex será igual al número de suites. Si va a haber tres veces más suites que Dúplex trirecámaras, ¿cuántas unidades de cada tipo tendrá el conjunto?

21. **Planeación de la inversión** El interés anual obtenido por el señor Carrillo en tres inversiones ascendió a \$21 600: 6% en una cuenta de ahorro, 8% en un fondo y 12% en certificados del mercado de dinero. Si la cantidad invertida en los certificados del mercado de dinero fue el doble de lo invertido en la cuenta de ahorro, y el interés generado por la inversión en los certificados del mercado de dinero fue igual a lo recibido por su inversión en un fondo, ¿cuánto dinero invirtió en cada tipo de instrumento?

22. **Ingresos en taquilla** Un cine tiene una capacidad de 900 asientos y cobra \$2 por niño, \$3 por estudiante y \$4 por adulto. En cierto monitoreo con el cine lleno, la mitad del auditorio adulto era igual al auditorio infantil y estudiantil juntos. Las entradas totalizaron \$2800. ¿Cuántos niños asistieron a la función?

23. **Decisiones gerenciales** La gerencia de Hartman Rent-A-Car ha asignado \$1 millón para comprar una flotilla de automóviles nuevos, con autos de tamaño pequeño, mediano y grande. Cada auto compacto, mediano y grande cuesta \$8 000, \$12 000 y \$16 000. Si Hartman adquiere dos veces más compactos que autos de tamaño medio y va a comprar 100 unidades, ¿cuántos autos de cada tipo adquirirá? (Suponga que se utiliza todo el presupuesto.)

24. **Sociedades de inversión** La gerencia de una sociedad privada de inversión tiene un fondo de \$200 000 para invertir en acciones. A fin de obtener un nivel razonable de riesgo, las acciones consideradas por la gerencia se han clasificado en tres categorías: de riesgo alto, medio y bajo. La gerencia estima que las primeras tendrán una tasa de recuperación de 15% por año, las acciones de riesgo medio una tasa de 10% por año, y las de bajo riesgo 6% por año. La inversión en las acciones de bajo riesgo es el doble de la suma de las inversiones en acciones de las otras categorías. Si el objetivo de la inversión es alcanzar una tasa promedio de 9% por año sobre la inversión total, ¿cuánto debe invertir la sociedad en cada tipo de acción?

25. **Planeación de una dieta** Un dietista desea planear una comida en torno de tres tipos de alimentos. El porcentaje de los requisitos diarios de proteínas, carbohidratos y hierro contenidos en cada onza de los tres tipos de alimento se resume en la siguiente tabla.

	Alimento I	Alimento II	Alimento III
Porcentaje de proteínas	10	6	8
Porcentaje de carbohidratos	10	12	6
Porcentaje de hierro	5	4	12

Indique cuántas onzas de cada tipo de alimento debe incluir el dietista en la comida para cubrir con exactitud los requisitos diarios de proteínas, carbohidratos y hierro (100% de cada uno).

**Soluciones
a los ejercicios
de autoevaluación 5.1**

1. Al despejar y en términos de x en la primera ecuación, se obtiene

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

Ahora, al sustituir este resultado en la segunda ecuación del sistema, resulta

$$x + 2\left(\frac{2}{3}x - 4\right) = 6$$

$$x + \frac{4}{3}x - 8 = 6$$

$$\frac{7}{3}x = 14$$

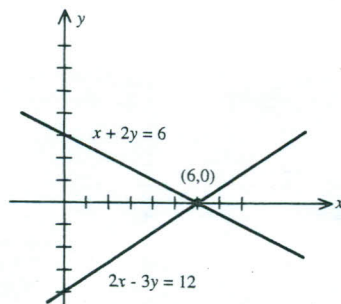
o

$$x = 6$$

Al sustituir este valor de x en la expresión para y ya obtenida, se llega a

$$y = \frac{2}{3}(6) - 4 = 0$$

Por lo tanto, el sistema tiene la única solución $x = 6$ y $y = 0$. Ambas rectas aparecen en la siguiente figura.



2. Sean x , y y z las respectivas cantidades de acres correspondientes a los cultivos A, B y C. La condición de utilizar toda la tierra cultivable se traduce en la ecuación

$$x + y + z = 200$$

El costo total por los tres cultivos fue $40x + 60y + 80z$ dólares, y como hay que ocupar todo el presupuesto, entonces

$$40x + 60y + 80z = 12,600$$

Por último, la cantidad de trabajo necesaria para los tres cultivos es $20x + 25y + 40z$ horas, y como debe utilizarse toda la mano de obra, se tiene

$$20x + 25y + 40z = 5,950$$

Así, se tiene la solución resolviendo este sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y + z = 200$$

$$40x + 60y + 80z = 12,600$$

$$20x + 25y + 40z = 5,950$$

5.2 Solución de sistemas de ecuaciones lineales I

Método de Gauss-Jordan

El método de sustitución que se expuso en la sección 5.1 sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales cuando la cantidad de ecuaciones lineales y de variables es reducida; pero en sistemas de gran tamaño, los pasos del procedimiento son difíciles de controlar.

Una técnica adecuada para resolver sistemas de ecuaciones lineales de cualquier tamaño es el **método de eliminación de Gauss-Jordan**. Una de sus ventajas es que se adapta con facilidad a las computadoras. Este método comprende una serie de operaciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para obtener en cada paso un **sistema equivalente**; es decir, un sistema con la misma solución que el sistema original. La reducción concluye cuando el sistema original ha sido transformado de modo que aparezca en cierta forma canónica de la que pueda leerse la solución con facilidad.

Las operaciones del método de eliminación de Gauss-Jordan son:

1. Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera.
2. Reemplazar una ecuación con un múltiplo constante (distinto de cero) de ella misma.
3. Reemplazar una ecuación con la suma de dicha ecuación y un múltiplo constante de cualquier otra ecuación.

A fin de ilustrar el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo aplicaremos a la solución del siguiente sistema:

$$2x + 4y = 8$$

$$3x - 2y = 4$$

Se comienza con la primera columna (o columna de las x). Primero se transforma el sistema en otro equivalente, donde el coeficiente de x en la primera ecuación sea igual a 1:

$$2x + 4y = 8$$

$$3x - 2y = 4 \quad (3a)$$

$$x + 2y = 4$$

Se multiplica la primera ecuación de (3a) por $\frac{1}{2}$ (operación 2)

$$3x - 2y = 4 \quad (3b)$$

A continuación se elimina x de la segunda ecuación.

$$x + 2y = 4$$

$$-8y = -8$$

Se reemplaza la segunda ecuación en (3b) con la suma de -3 por la primera ecuación, más la segunda ecuación (operación 3).

(3c)

$$-3x - 6y = -12$$

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 4 \\ -3x - 6y = -12 \\ \hline -8y = -8 \end{array}$$

$$-8y = -8$$

Entonces se obtiene el siguiente sistema equivalente, en donde el coeficiente de y en la segunda ecuación es 1.

$$x + 2y = 4$$

Se multiplica la segunda ecuación en (3c) por $-\frac{1}{8}$ (operación 2).

$$y = 1 \quad (3d)$$

Luego se elimina y de la primera ecuación.

$$x = 2$$

$$y = 1$$

Se sustituye la primera ecuación en (3d) con la suma de -2 por la segunda ecuación, más la primera (operación 3).

$$x + 2y = 4$$

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ -2y = -2 \\ \hline x = 2 \end{array}$$

$$x = 2$$

Ahora el sistema está ahora en forma canónica y es fácil deducir que la solución de (3a) es $x = 2$ y $y = 1$. También se puede expresar esta solución como $(2, 1)$ e interpretarla geométricamente como el punto de intersección de las dos rectas representadas por las dos ecuaciones lineales que conforman el sistema de ecuaciones dado.

En seguida se analizará otro ejemplo que comprende un sistema de tres ecuaciones lineales y tres variables.

EJEMPLO 1 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + 4y + 6z = 22$$

$$3x + 8y + 5z = 27$$

$$-x + y + 2z = 2$$

Solución Primero se transforma este sistema en uno equivalente, donde el coeficiente de x en la primera ecuación sea 1:

$$2x + 4y + 6z = 22$$

$$3x + 8y + 5z = 27$$

$$-x + y + 2z = 2 \quad (4a)$$

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$3x + 8y + 5z = 27$$

$$-x + y + 2z = 2$$

Se multiplica la primera ecuación en (4a) por $\frac{1}{2}$.

(4b)

Después se elimina la variable x de todas las ecuaciones, excepto la primera:

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$2y - 4z = -6$$

$$-x + y + 2z = 2$$

Se reemplaza la segunda ecuación en (4b) con la suma de -3 por la primera ecuación más la segunda ecuación.

(4c)

$$-3x - 6y - 9z = -33$$

$$\frac{3x + 8y + 5z = 27}{2y - 4z = -6}$$

$$2y - 4z = -6$$

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$2y - 4z = -6$$

$$3y + 5z = 13$$

Se cambia la tercera ecuación en (4c) por la suma de la primera ecuación más la segunda ecuación.

(4d)

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$\frac{-x + y + 2z = 2}{3y + 5z = 13}$$

$$3y + 5z = 13$$

Entonces se transforma el sistema (4d) en otro sistema equivalente, en donde el coeficiente de y en la segunda ecuación sea 1:

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$y - 2z = -3$$

$$3y + 5z = 13$$

Se multiplica la segunda ecuación en (4d) por $\frac{1}{2}$.

(4e)

Ahora se elimina y de todas las ecuaciones, excepto la segunda, utilizando la operación 3 del método de eliminación.

$$x + 7z = 17$$

$$y - 2z = -3$$

$$3y + 5z = 13$$

Se reemplaza la primera ecuación en (4e) con la suma de la primera ecuación más -2 por la segunda ecuación.

(4f)

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$\frac{-2y + 4z = 6}{x + 7z = 17}$$

$$x + 7z = 17$$

$$x + 7z = 17$$

$$y - 2z = -3$$

$$11z = 22$$

Se sustituye la tercera ecuación en (4f) con la suma de (-3) por la segunda ecuación, más la tercera.

(4g)

$$-3y + 6z = 9$$

$$\frac{3y + 5z = 13}{11z = 22}$$

$$11z = 22$$

Por último, al multiplicar la tercera ecuación por $1/11$ en (4g) se obtiene el sistema

$$x + 7z = 17$$

$$y - 2z = -3$$

$$z = 2$$

Al eliminar z de todas las ecuaciones excepto la tercera (¡inténtelo!) se llega al sistema

$$\begin{aligned}x &= 3 \\y &= 1 \\z &= 2\end{aligned}\tag{4h}$$

En su forma final, la solución del sistema de ecuaciones dado resulta muy legible: se tiene que $x = 3$, $y = 1$ y $z = 2$. En términos geométricos, el punto $(3, 1, 2)$ está en la intersección de los tres planos descritos por las tres ecuaciones que conforman al sistema dado. ■

Matrices aumentadas

Obsérvese en el ejemplo anterior que en cada paso del proceso de reducción las variables x , y y z no tienen una función importante, excepto recordar la posición de cada coeficiente del sistema. Con ayuda de las **matrices** —arreglos rectangulares de números— se puede evitar la escritura de las variables en cada paso de la reducción y ahorrar con ello mucho trabajo; por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned}2x + 4y + 6z &= 22 \\3x + 8y + 5z &= 27 \\-x + y + 2z &= 2\end{aligned}\tag{5}$$

se puede representar mediante la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 22 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right]\tag{6}$$

Matriz aumentada que representa el sistema (5)

La submatriz formada por las tres primeras columnas de la matriz (6) es la **matriz de coeficientes** del sistema (5). La propia matriz (6) se conoce como la **matriz aumentada** del sistema (5), puesto que se obtiene al unir la matriz de coeficientes con la matriz columna de las constantes. El segmento vertical separa la columna de constantes de la matriz de coeficientes.

El siguiente ejemplo muestra todo el trabajo que se puede ahorrar usando matrices en vez de la representación común de los sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 2 Escribir la matriz aumentada correspondiente a cada uno de los sistemas equivalentes dados en (4a) a (4h).

Solución A continuación se muestra la serie pedida de matrices aumentadas.

Sistema equivalente	Matriz aumentada
a. $2x + 4y + 6z = 22$	$\left[\begin{array}{ccc c} 2 & 4 & 6 & 22 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right]\tag{7a}$
$3x + 8y + 5z = 27$	
$-x + y + 2z = 2$	

$$\begin{array}{l} \text{b. } x + 2y + 3z = 11 \\ 3x + 8y + 5z = 27 \\ -x + y + 2z = 2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \quad (7b)$$

$$\begin{array}{l} \text{c. } x + 2y + 3z = 11 \\ 2y - 4z = -6 \\ -x + y + 2z = 2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \quad (7c)$$

$$\begin{array}{l} \text{d. } x + 2y + 3z = 11 \\ 2y - 4z = -6 \\ 3y + 5z = 13 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array} \right] \quad (7d)$$

$$\begin{array}{l} \text{e. } x + 2y + 3z = 11 \\ y - 2z = -3 \\ 3y + 5z = 13 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array} \right] \quad (7e)$$

$$\begin{array}{l} \text{f. } x + 7z = 17 \\ y - 2z = -3 \\ 3y + 5z = 13 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array} \right] \quad (7f)$$

$$\begin{array}{l} \text{g. } x + 7z = 17 \\ y - 2z = -3 \\ 11z = 22 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array} \right] \quad (7g)$$

$$\begin{array}{l} \text{h. } x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad (7h)$$

La matriz de coeficientes en (7h) es un ejemplo de matriz en **forma reducida por renglones**. En general, una matriz de coeficientes con m renglones y n columnas (llamada matriz $m \times n$) está en forma reducida por renglones si satisface las siguientes condiciones.

Forma reducida por renglones

1. Cada renglón que sólo tenga ceros está debajo de todos los renglones que tienen entradas distintas de cero.
2. La primera entrada distinta de cero en cada renglón es 1 (llamado *1 principal*).
3. En cualesquiera dos renglones sucesivos (distintos de cero), el 1 principal del renglón inferior queda a la derecha del 1 principal del renglón superior.
4. Si una columna contiene un 1 principal, las demás entradas de esa columna son ceros.

EJEMPLO 3 Determinar cuáles de las siguientes matrices están en forma reducida por renglones. Si la matriz no aparece en esta forma, indicar la condición violada.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] & \text{b. } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \text{c. } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{d. } \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] & \text{e. } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] & \text{f. } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \text{g. } \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Solución Las matrices en a), b) y c) están en forma reducida por renglones.

- d. Esta matriz no está en forma reducida por renglones. Se violan las condiciones 3 y 4: el 1 principal del segundo renglón está a la izquierda del 1 principal del primer renglón; además, la columna 3 tiene un 1 principal en el renglón 3 y un elemento distinto de cero arriba de él.
- e. Esta matriz no está en forma reducida. Se violan las condiciones 2 y 4: la primera entrada distinta de cero en el renglón 3 es un 2, no un 1; además, la columna 3 contiene un 1 principal y tiene una entrada distinta de cero arriba de ésta.
- f. Esta matriz no está en forma reducida. Se viola la condición 2: la primera entrada distinta de cero en el renglón 2 no es un 1 principal.
- g. Esta matriz no está en forma reducida. Se viola la condición 1: el renglón 1 consta sólo de ceros y no está debajo de todos los renglones distintos de cero.

El análisis anterior sugiere la siguiente adaptación del método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices. En primer lugar, las tres operaciones sobre las ecuaciones de un sistema (véase pág. 193) se traducen en las siguientes **operaciones de renglón** sobre las matrices aumentadas correspondientes.

Operaciones de renglón

1. Intercambiar dos renglones.
2. Reemplazar cualquier renglón con un múltiplo no nulo de él.
3. Sustituir cualquier renglón con la suma de dicho renglón y un múltiplo de cualquier otro.

En el ejemplo 2 se obtuvieron las matrices aumentadas mediante las operaciones utilizadas en el sistema equivalente de ecuaciones del ejemplo 1.

Para describir el método de eliminación de Gauss-Jordan mediante matrices, hay que introducir cierta terminología. Comencemos definiendo qué se entiende por una **columna unitaria**.

Columna unitaria

Una columna de la matriz de coeficientes está en forma unitaria si una de las entradas de la columna es un 1 y las demás son cero.

Por ejemplo, en la matriz de coeficientes de (7d), sólo la primera columna está en forma unitaria; en la matriz de coeficientes de (7h), las tres columnas están en forma unitaria. La serie de operaciones de renglón que transforman la matriz aumentada (7a) en la matriz equivalente (7d) donde la primera columna

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ -1 \end{array}$$

de (7a) se transforma en la columna unitaria

$$\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

es un **pivoteo** de la matriz en torno del elemento (número) 2. De manera análoga, se pivotea en torno del elemento 2 de la segunda columna de (7d), que aquí aparece encerrado en un círculo,

$$\begin{array}{c} 2 \\ \textcircled{2} \\ 3 \end{array}$$

para obtener la matriz aumentada (7g). Por último, al pivotear en torno del elemento 11 de la columna 3 de (7g)

$$\begin{array}{c} 7 \\ -2 \\ \textcircled{11} \end{array}$$

se obtiene la matriz aumentada (7h), cuyas columnas están en forma unitaria. El elemento en torno del cual se pivotea una matriz es el *elemento pivote*.

Antes de analizar el siguiente ejemplo, se introduce la siguiente notación para los tres tipos de operaciones de renglón.

Notación para las operaciones de renglón

Si R_i es el i -ésimo renglón de una matriz, se escribe:

Operación 1: $R_i \leftrightarrow R_j$ significa intercambiar el renglón i por el renglón j

Operación 2: cR_i significa reemplazar el renglón i con c con el renglón i

Operación 3: $R_i + aR_j$ significa reemplazar el renglón i con la suma del renglón i y a veces el renglón j

EJEMPLO 4 Pivotear la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{3} & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right]$$

en torno del elemento encerrado en un círculo.

Solución Al utilizar la notación recién introducida, se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{array} \right]$$

La primera columna, que en un principio tenía la entrada 3, está ahora en forma unitaria, con un 1 donde estaba el elemento pivote, con lo que concluye la solución.

Solución alternativa En la primera solución se utilizó la operación 2 para obtener un 1 donde estaba el elemento pivote. Otra alternativa es usar la operación 3 como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

OBSERVACIÓN En el ejemplo 4, las dos matrices

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{array} \right] \text{ y } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

parecen un poco diferentes, pero son equivalentes. El lector puede comprobar esto observando que las matrices representan los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x + \frac{5}{3}y & = & 3 \\ x + 2y & = & 4 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} \frac{1}{3}y & = & -1 \\ -y & = & -3 \end{array}$$

respectivamente, y ambas tienen la misma solución: $x = -2$ y $y = 3$. El ejemplo 4 también muestra que a veces podemos evitar el trabajo con fracciones, utilizando la operación por renglón adecuada. \square

A continuación se resume el método de Gauss-Jordan:

El método de eliminación de Gauss-Jordan

1. Se escribe la matriz aumentada correspondiente al sistema lineal.
2. En caso necesario se intercambian renglones (operación 1), para obtener una matriz aumentada en la que la primera entrada del primer renglón sea distinta de cero. Después se realiza el pivoteo de la matriz en torno de esta entrada.
3. Se intercambia el segundo renglón con algún renglón debajo de él, en caso necesario, para obtener una matriz aumentada en que la segunda entrada del segundo renglón sea distinto de cero. Se pivotea la matriz en torno de esta entrada.
4. Se continúa de este modo hasta que la matriz final quede en forma reducida por renglones.



Antes de escribir la matriz aumentada, asegúrese de escribir todas las ecuaciones con las variables a la izquierda y los términos constantes a la derecha del signo de igualdad. Además, asegúrese de que las variables tengan el mismo orden en todas las ecuaciones.

EJEMPLO 5 Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$3x - 2y + 8z = 9$$

$$-2x + 2y + z = 3$$

$$x + 2y - 3z = 8$$

(8)

Solución Al utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 + 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & \textcircled{2} & -12 & -4 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \textcircled{31} & 31 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{31}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - 9R_3 \\ R_2 + 6R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La solución del sistema (8) está dada por $x = 3$, $y = 4$ y $z = 1$, y se puede comprobar sustituyendo en el sistema (8) como sigue:

$$3(3) - 2(4) + 8(1) = 9 \quad \checkmark$$

$$-2(3) + 2(4) + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$3 + 2(4) - 3(1) = 8 \quad \checkmark$$



Al buscar un elemento que sirva de pivote, es importante recordar que sólo se puede trabajar con el renglón que contiene al pivote potencial o con cualquier renglón *debajo*

de él. Para ver lo que puede fallar si no se tiene ese cuidado, considérese la siguiente matriz aumentada para cierto sistema lineal:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Nótese que la columna 1 está en forma unitaria. El siguiente paso en el procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan pide obtener un cero en la segunda posición del segundo renglón. Si se utiliza el primer renglón (que está *sobre* el renglón en cuestión), se puede proceder como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Como se puede ver, no sólo se ha obtenido un elemento distinto de cero que sirva de siguiente pivote, sino que éste ya es un 1, lo que ahorra el siguiente paso. Esto parece ser un buen movimiento. Pero hay que tener cuidado, ya que se ha perdido parte del trabajo anterior, pues la primera columna ya no tiene la forma unitaria en que el 1 aparece en primer lugar. El movimiento correcto en este caso consiste en intercambiar el segundo y tercer renglones.

El siguiente ejemplo muestra cómo enfrentar una situación en que la entrada del primer renglón de la matriz aumentada es cero.

EJEMPLO 6 Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 7 \\ 3x + 6y - 12z &= -3 \\ 5x - 2y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

Solución Al utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & -12 & -3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{array} \right] &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & \textcircled{2} & 3 & 7 \\ 0 & -12 & 22 & -2 \end{array} \right] &\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -12 & 22 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \\ R_3 + 12R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{40} & 40 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{40}R_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + 7R_3 \\ R_2 - \frac{3}{2}R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La solución del sistema está dada por $x = -1$, $y = 2$ y $z = 1$, lo cual se puede comprobar mediante su sustitución en el sistema. ■

Aplicación

EJEMPLO 7 Completar la solución al ejemplo 1, página 187.

Solución Para concluir la solución al problema planteado en el ejemplo 1, recuérdese que la formulación matemática del problema condujo al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + y + z = 180$$

$$x + 3y + 2z = 300$$

$$2x + y + 2z = 240$$

donde x , y y z denotan las cantidades respectivas de recuerdos de tipo A, B y C por fabricar.

Al resolver el sistema anterior de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 3 & 2 & 300 \\ 2 & 1 & 2 & 240 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 300 \\ 2 & 1 & 1 & 180 \\ 2 & 1 & 2 & 240 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 300 \\ 0 & \textcircled{-5} & -3 & -420 \\ 0 & -5 & -2 & -360 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 300 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 84 \\ 0 & -5 & -2 & -360 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - 3R_2 \\ R_3 + 5R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 48 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 84 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 60 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - \frac{1}{5}R_3 \\ R_2 - \frac{3}{5}R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array} \right]$$

Así, $x = 36$, $y = 48$ y $z = 60$; es decir, la compañía debe fabricar 36 piezas tipo A, 48 tipo B y 60 tipo C para utilizar todo el tiempo de máquina disponible. ■

Ejercicios de autoevaluación 5.2

1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 3y + z = 6$$

$$x - 2y + 3z = -3$$

$$3x + 2y - 4z = 12$$

mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

2. Un agricultor tiene 200 acres de terreno adecuado para los cultivos A, B y C. El costo respectivo por acre es de \$80 y dispone de \$12 600 para trabajar la tierra. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de trabajo; cada acre del cultivo B, 25 horas de trabajo, y cada acre del cultivo C, 40 horas de trabajo. El agricultor tiene un máximo de 5 950 horas de trabajo disponibles. Si desea utilizar toda la tierra cultivable, todo el presupuesto y toda la mano de obra disponible, ¿cuántos acres debe plantar de cada cultivo?

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.2 aparecen en la página 207.

5.2 EJERCICIOS

En los ejercicios 1-4, escriba la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones.

1. $2x - 3y = 7$

$3x + y = 4$

2. $3x + 7y - 8z = 5$

$x + 3z = -2$

$4x - 3y = 7$

3. $-y + 2z = 6$

$2x + 2y - 8z = 7$

$3y + 4z = 0$

4. $3x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

$2x_2 - 3x_3 = 5$

En los ejercicios 5-8, escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz aumentada.

5.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

6.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

7.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

8.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

13.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

14.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right]$$

15.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right]$$

16.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

17.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

18.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

En los ejercicios 19-26, realice el pivoteo del sistema en torno del elemento encerrado en un círculo.

19.
$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{2} & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

20.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ \textcircled{4} & 2 & 5 \end{array} \right]$$

21.
$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{-1} & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

22.
$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right]$$

23.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 4 & 6 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

24.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ \textcircled{2} & 4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

25.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & \textcircled{1} & 3 \\ 5 & 6 & 2 & -4 \end{array} \right]$$

26.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{-3} & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

En los ejercicios 9-18, indique si la matriz está en forma reducida por renglones.

9.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

10.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

11.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

12.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

En los ejercicios 27-30, complete las entradas faltantes realizando las operaciones de renglón indicadas para obtener las matrices reducidas por renglones.

$$27. \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$28. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$29. \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -9 & -1 & -16 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - 3R_2 \\ R_3 + 9R_2 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + R_3 \\ -R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$30. \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 + 4R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{11}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 - 3R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

31. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para la matriz aumentada del ejercicio 27. Con los resultados del ejercicio 27 encuentre la solución del sistema.

32. Repita el ejercicio 31 para la matriz aumentada del ejercicio 28.

33. Repita el ejercicio 31 para la matriz aumentada del ejercicio 29.

34. Repita el ejercicio 31 para la matriz aumentada del ejercicio 30.

En los ejercicios 35-50, resuelva el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$35. \quad x - 2y = 8$$

$$3x + 4y = 4$$

$$37. \quad 2x - 3y = -8$$

$$4x + y = -2$$

$$39. \quad x + y + z = 0$$

$$2x - y + z = 1$$

$$x + y - 2z = 2$$

$$41. \quad 2x + 2y + z = 9$$

$$x + z = 4$$

$$4y - 3z = 17$$

$$43. \quad -x_2 + x_3 = 2$$

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$44. \quad 2x + 4y - 6z = 38$$

$$x + 2y + 3z = 7$$

$$3x - 4y + 4z = -19$$

$$45. \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 10$$

$$46. \quad 2x + 3y - 6z = -11$$

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$3x + y = 7$$

$$48. \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3$$

$$49. \quad x_1 - x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$-2x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

$$36. \quad 3x + y = 1$$

$$-7x - 2y = -1$$

$$38. \quad 5x + 3y = 9$$

$$-2x + y = -8$$

$$40. \quad 2x + y - 2z = 4$$

$$x + 3y - z = -3$$

$$3x + 4y - z = 7$$

$$42. \quad 2x + 3y - 2z = 10$$

$$3x - 2y + 2z = 0$$

$$4x - y + 3z = -1$$

$$\begin{aligned} 50. \quad 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Los problemas de los ejercicios 51-59 se corresponden con los ejercicios 15-23 de la sección 5-1. Utilice los resultados de tales ejercicios como apoyo para resolver estos problemas.

- 51. Agricultura** La granja de los Johnson tiene 500 acres de terreno reservados para el cultivo del maíz y el trigo. El costo respectivo de cultivo del maíz y el trigo (incluyendo semillas y mano de obra) es de \$42 y \$30 por acre. El señor Johnson dispone de \$18 600 para estos cultivos. Si desea utilizar todo el terreno reservado y todo el presupuesto, ¿cuántos acres de cada cultivo debe plantar?
- 52. Inversiones** Miguel tiene un total de \$2000 depositado en dos instituciones de ahorro. Una paga interés simple con una tasa de 6% por año, y la otra, un interés simple con una tasa de 8% por año. Si Miguel ganó un total de \$144 por concepto de intereses durante un año, ¿cuánto dinero ha depositado en cada institución?
- 53. Mezclas** La tienda Coffee Shop vende una mezcla de café obtenida a partir de dos cafés, uno con un costo de \$2.50 la libra y el otro a \$3 la libra. Si la mezcla se vende a \$2.80 la libra, ¿qué cantidad de cada café se utiliza para obtener la mezcla mencionada? [Sugerencia: Suponga que el peso de la mezcla de café es 100 libras.]
- 54. Inversiones** Isis tiene un total de \$30 000 invertidos en dos tipos de bonos, con rendimientos de 8% y 10% de interés simple por año, respectivamente. Si el total de intereses que recibió en un año fue de \$2 640, ¿cuánto dinero tiene invertido en cada bono?
- 55. Transporte** La cantidad total de pasajeros que utilizan cierta ruta de autobús durante el turno matutino es 1000. Si la tarifa para niños es de 25 centavos y la de los adultos es de 75 centavos y el ingreso total durante el turno matutino fue de \$650, ¿cuántos niños y adultos utilizaron el autobús en este turno?
- 56. Bienes raíces** Carrizal y Asociados, empresa de bienes raíces, planea construir un nuevo complejo habitacional con departamentos de una recámara y casas de dos y tres recámaras. Se planea un total de 192 unidades, y el número de unidades familiares (casas de dos o tres recámaras) será igual al número de departamentos de una recámara. Si el número de departamentos de una recámara será igual al triple del número de casas de tres recámaras, determine cuántas unidades de cada tipo habrá en el complejo.
- 57. Planeación de una inversión** El interés anual relativo a tres inversiones del señor Carrillo ascendió a \$21,600: 6% en una cuenta de ahorro, 8% en un fideicomiso y 12% en certificados del mercado de dinero. Si la cantidad invertida por él en los certificados del mercado de dinero es el doble de la inversión en la cuenta de ahorro, y el interés obtenido de la inversión en el mercado de dinero era igual a los dividendos recibidos de su inversión en el fideicomiso, determine cuánto dinero colocó en cada tipo de inversión.
- 58. Ingresos en taquilla** Un cine tiene 900 asientos y cobra \$2 por niño, \$3 por estudiante y \$4 por adulto. En cierta función, con el cine lleno, había la mitad de adultos con respecto del número de niños y estudiantes juntos. Los ingresos totales fueron \$2800. ¿Cuántos niños fueron a la función?
- 59. Decisiones gerenciales** La gerencia de Hartman Rent-A-Car asignó \$1 millón para comprar una flotilla de automóviles nuevos, con autos compactos, medianos y grandes. Los compactos cuestan \$8,000 cada uno, los medianos cuestan \$12,000 y los grandes \$16,000. Si Hartman compra dos veces más compactos que medianos, y el total de autos por adquirir es 100, determine cuántos autos de cada tipo comprarán. (Suponga que se utilizará todo el presupuesto.)
- 60. Inversión** Los señores García disponen de \$100 000 para invertir en acciones, bonos y una cuenta en el mercado de dinero. Las acciones tienen un valor de recuperación de 12% por año, mientras que los bonos dan 8% al año y la cuenta del mercado de dinero, 4% anual. Ellos han convenido que la cantidad invertida en el mercado de dinero debe ser igual a la suma de 20% de la cantidad invertida en acciones y 10% de la inversión en bonos. ¿Cómo deben distribuir sus recursos si necesitan un ingreso anual de \$10 000 por sus inversiones?
- 61. Sociedades de inversión** La gerencia de una sociedad de inversión tiene un fondo de \$200 000 para invertir en acciones. A fin de alcanzar un nivel aceptable de riesgo, las acciones consideradas se han clasificado en tres categorías: de alto, mediano y bajo riesgo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de recuperación de 15% por año; las de mediano, 10% por año, y las de bajo, 6% por año. La inversión en las acciones de bajo riesgo será el doble de la suma invertida en las otras dos categorías. Si el objetivo de la inversión es tener una tasa promedio de recuperación de 9% por año sobre la inversión total, ¿cuánto se debe invertir en cada tipo de acción?

62. **Planeación de una dieta** Un dietista desea planear cierta dieta con base en tres tipos de alimentos. Los porcentajes de requisitos diarios de proteínas, carbohidratos y hierro contenidos en cada onza de los tres tipos de alimentos aparecen en la siguiente tabla.

	Alimento I	Alimento II	Alimento III
Porcentaje de proteínas	10	6	8
Porcentaje de carbohidratos	10	12	6
Porcentaje de hierro	5	4	12

Indique cuántas onzas de cada tipo de alimento debe incluir el dietista en la comida para cubrir con exactitud los requisitos diarios de proteínas, carbohidratos y hierro (100% de cada uno).

63. **Ingresos en taquilla** Para la noche de estreno en la ópera se vendieron 1000 boletos. Los asientos de platea costaron \$80; los de orquesta, \$60, y los de galería, \$50. El número combinado de boletos vendidos para platea

y orquesta excedían por 400 el doble de los boletos vendidos de galería. El total de ingresos para esa función fue de \$62 800. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada uno?

64. **Planeación de la producción** Un fabricante de blusas produce tres tipos: sin manga, manga corta y manga larga. El tiempo requerido por cada departamento para producir una docena de blusas de cada tipo aparece en la siguiente tabla.

Departamento	Sin manga	Manga corta	Manga larga
Corte	9 min	12 min	15 min
Confección	22 min	24 min	28 min
Empaquetado	6 min	8 min	8 min

Los departamentos de corte, confección y empaquetado disponen de un máximo de 80, 160 y 48 horas de trabajo, respectivamente, por día. ¿Cuántas docenas de cada tipo de blusa se pueden producir al día si la planta opera a toda su capacidad?

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.2

1. Se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \\ 0 & 8 & -13 & 21 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & -13 & 21 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ R_3 - 7R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & 15 \\ 0 & 1 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 51 & -51 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{51} R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & 15 \\ 0 & 1 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + 13R_3 \\ R_2 + 8R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$ y $z = -1$.

2. En relación con la solución del punto 2 de los ejercicios de autoevaluación 5.1, se ve que el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y + z = 200$$

$$40x + 60y + 80z = 12600$$

$$20x + 25y + 40z = 5950$$

Al utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan, se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 40 & 60 & 80 & 12600 \\ 20 & 25 & 40 & 5950 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 - 40R_1 \\ R_3 - 20R_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 20 & 40 & 4600 \\ 0 & 5 & 20 & 1950 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{20}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 230 \\ 0 & 5 & 20 & 1950 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_3 - 5R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -30 \\ 0 & 1 & 2 & 230 \\ 0 & 0 & 10 & 800 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{10}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -30 \\ 0 & 1 & 2 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 + R_3 \\ R_2 - 2R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array} \right]$$

A partir de la última matriz aumentada en forma reducida se ve que $x = 50$, $y = 70$ y $z = 80$; por lo tanto, el agricultor debe plantar 50 acres del cultivo A, 70 del cultivo B y 80 del cultivo C.

U s o d e l a t e c n o l o g í a

Solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan

Una utilería de graficación permite realizar las tres operaciones matriciales sobre una matriz. Las instrucciones son:

Operación	Función en la calculadora
$R_i \leftrightarrow R_j$	rSwap (A, i, j)
cR_i	multR (c, A, i)
$R_i + aR_j$	mRAdd (a, A, j, i)

(Véase Sec. A.5, en el Ap. A.)

Al realizar una operación de renglón sobre una matriz, el resultado se guarda como **Ans** en la calculadora. Si se efectúa otra operación sobre dicha matriz, se elimina la matriz de la memoria. En caso de que se cometa un error en la operación, la matriz anterior se habrá perdido. Por esta razón, hay que guardar los resultados de cada operación. Para esto se oprime **STO** (indicado mediante el símbolo ► en Ejem. 1), seguido del nombre de una matriz y luego **ENTER**. Este proceso se incorpora en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Utilizar una calculadora graficadora para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan (véase Ejem. 5, Sec. 5.2).

$$3x - 2y + 8z = 9$$

$$-2x + 2y + z = 3$$

$$x + 2y - 3z = 8$$

Solución Con el método de Gauss-Jordan se obtiene la siguiente serie de matrices equivalentes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{mRAdd}(1, A, 2, 1) \blacktriangleright B} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{mRAdd}(2, B, 1, 2) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{mRAdd}(-1, C, 1, 3) \blacktriangleright B} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{multR}(\frac{1}{2}, B, 2) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{mRAdd}(-2, C, 2, 3) \blacktriangleright B} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{multR}(-\frac{1}{31}, B, 3) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{mRAdd}(-9, C, 3, 1) \blacktriangleright B} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{mRAdd}(-9.5, B, 3, 2) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La última matriz está en forma reducida por renglones, por lo que la solución del sistema es $x = 3$, $y = 4$ y $z = 1$.

Uso de **rref** (TI-85) para resolver un sistema de ecuaciones lineales

La operación **rref** transforma una matriz aumentada en otra que tiene forma reducida por renglones (véase Sec. A.5, Ap. A); por ejemplo, al usar **rref**, se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref } A} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

¡que es igual a lo obtenido!

Uso de **SIMULT** (TI-85) para resolver un sistema de ecuaciones

La operación **SIMULT** de una utilería de graficación sirve para resolver un sistema de n ecuaciones lineales en n variables, donde n es un entero entre 2 y 30 (véase Sec. A.5, Ap. A).

EJERCICIOS

En los ejercicios 1-6, utilice una utilería de graficación para resolver el sistema de ecuaciones a) mediante el método de Gauss-Jordan; b) con la operación **rref**, y c) con **SIMULT**. Exprese su respuesta con una precisión de cuatro cifras decimales.

1. $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -7$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 22$

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -3$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 12$

2. $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2$

$x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6$

$-3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 9$

3. $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9$

$-x_1 - 2x_2 - 3x_4 = -1$

$x_1 - 3x_3 + x_4 = 10$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 8$

4. $x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2$

$-x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 3$

$3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4$

5. $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 16$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -11$

$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = -13$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 15$

$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - x_5 = -10$

6. $2.1x_1 - 3.2x_2 + 6.4x_3 + 7x_4 - 3.2x_5 = 54.3$

$4.1x_1 + 2.2x_2 - 3.1x_3 - 4.2x_4 + 3.3x_5 = -20.81$

$3.4x_1 - 6.2x_2 + 4.7x_3 + 2.1x_4 - 5.3x_5 = 24.7$

$4.1x_1 + 7.3x_2 + 5.2x_3 + 6.1x_4 - 8.2x_5 = 29.25$

$2.8x_1 + 5.2x_2 + 3.1x_3 + 5.4x_4 + 3.8x_5 = 43.72$

5.3 Solución de sistemas de ecuaciones lineales II

En esta sección continúa el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Para ser más específicos, se analizarán sistemas con una infinidad de soluciones y sistemas sin solución. También se estudiarán sistemas de ecuaciones lineales en donde el número de variables no es igual al número de ecuaciones en el sistema.

El primer ejemplo ilustra la situación en donde un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones.

EJEMPLO 1 *Un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones.* Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= -2 \\3x - y - 2z &= 1 \\2x + 3y - 5z &= -3\end{aligned}\quad (9)$$

Solución Con el método de eliminación de Gauss-Jordan se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & \textcircled{-7} & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2} \\&\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{aligned}$$

La última matriz aumentada está en forma reducida por renglones. Al interpretarla como sistema de ecuaciones lineales se tiene

$$\begin{aligned}x - z &= 0 \\y - z &= -1\end{aligned}$$

un sistema de dos ecuaciones en las tres variables x , y y z .

Ahora se distingue una variable, digamos z , y se despejan x y y en términos de ella. Se obtiene

$$\begin{aligned}x &= z \\y &= z - 1\end{aligned}$$

Si se asigna un valor particular a z , como $z = 0$, se tiene $x = 0$ y $y = -1$, con lo que se llega a la solución $(0, -1, 0)$ del sistema (9). Al hacer $z = 1$, se obtiene la solución $(1, 0, 1)$. En general, si se hace $z = t$, donde t representa un número real, se obtiene una solución dada por $(t, t - 1, t)$. Puesto que el parámetro t puede ser cualquier número real, se ve que el sistema (9) tiene una infinidad de soluciones. En términos geométricos, las soluciones del sistema (9) están en la línea recta del espacio tridimensional dada por la intersección de los tres planos determinados por las tres ecuaciones del sistema. ■

OBSERVACIÓN En el ejemplo 1 se eligió z como parámetro pues era más conveniente despejar x y y en términos de z (las columnas de x y y están en forma unitaria). □

El ejemplo que sigue muestra lo que ocurre en el procedimiento de eliminación cuando el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 2 *Un sistema de ecuaciones que no tiene solución.* Resolver el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\3x - y - z &= 4 \\x + 5y + 5z &= -1\end{aligned}\quad (10)$$

Solución Al utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow[\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1}]{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Nótese que el tercer renglón de la última matriz se lee $0x + 0y + 0z = -1$ —es decir, $0 = -1$!—; por lo tanto, se concluye que el sistema (10) es inconsistente y carece de solución. En términos geométricos, se tiene una situación en que dos de los planos se intersecan en una línea recta, pero el tercero es paralelo a esta recta de intersección de los dos planos, por lo cual no la interseca; en consecuencia, no existe un punto de intersección de los tres planos. ■

El ejemplo 2 presenta el siguiente resultado, más general, del uso del método de eliminación de Gauss-Jordan.

Sistemas sin solución

Si existe un renglón de la matriz aumentada que sólo contenga ceros a la izquierda de la recta vertical y una entrada distinta de cero a la derecha de la recta, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Quizá el lector ha advertido que en todos los ejemplos anteriores se ha trabajado con sistemas con el mismo número de ecuaciones lineales y de variables; sin embargo, en la práctica también aparecen los sistemas en que el número de ecuaciones es distinto del número de variables. De hecho, se verá este tipo de sistemas en los ejemplos 3 y 4.

El siguiente teorema proporciona cierta información preliminar acerca de un sistema de ecuaciones lineales.

Teorema 1

- a. Si el número de ecuaciones es mayor o igual que el número de variables en un sistema lineal, entonces una de las siguientes posibilidades es cierta:
 - i. El sistema no tiene solución.
 - ii. El sistema tiene exactamente una solución.
 - iii. El sistema tiene una infinidad de soluciones.
- b. Si existen menos ecuaciones que variables en un sistema lineal, entonces el sistema carece de solución o tiene una infinidad de soluciones.

OBSERVACIÓN El teorema 1 sirve para indicar la naturaleza de la solución, incluso antes de comenzar a resolver un problema. □

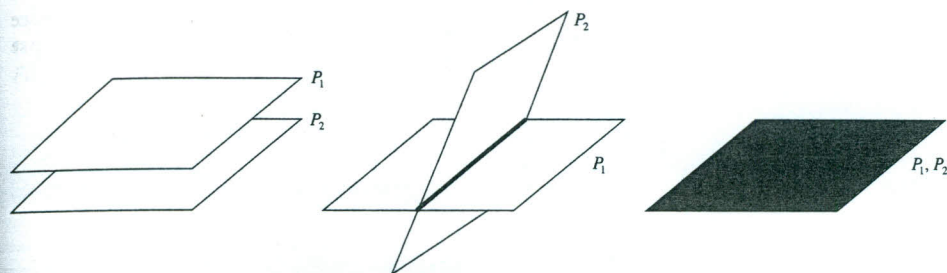
Aunque no se demostrará este teorema, hay que recordar que el inciso a) se ha ilustrado a nivel geométrico, para el caso en que existen exactamente tantas ecuaciones

(tres) como variables. A fin de mostrar la validez del inciso b), considérese de nuevo el caso en que el sistema posee tres variables. Ahora bien, si sólo hay una ecuación en el sistema, está claro que existe una infinidad de soluciones, correspondientes geoméricamente a todos los puntos que se encuentran sobre el plano representado por la ecuación.

Ahora, si hay dos ecuaciones en el sistema, entonces *sólo* existe una de las siguientes posibilidades:

1. Los dos planos son paralelos y distintos.
2. Los dos planos se intersectan en una línea recta.
3. Los dos planos coinciden (las dos ecuaciones definen al mismo plano; véase Fig. 6).

FIGURA 6



(a) Sin solución

(b) Una infinidad de soluciones

(c) Una infinidad de soluciones

Así, no existe solución o hay una infinidad de soluciones correspondientes a los puntos que están en la línea de intersección de los dos planos o en un único plano determinado por las dos ecuaciones. En el caso en que dos planos se intersectan en una línea recta, las soluciones comprenden un parámetro, mientras que en el caso en que los planos coincidan, las soluciones abarcarán dos parámetros.

EJEMPLO 3 *Un sistema con más ecuaciones que variables.* Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + 2y = 4$$

$$x - 2y = 0$$

$$4x + 3y = 12$$

Solución Se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - 4R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \textcircled{-4} & -4 \\ 0 & -5 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 + 5R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

El último renglón de la matriz aumentada reducida por renglones significa que $0 = 1$, lo cual es imposible; así pues, se concluye que el sistema dado no tiene solución. En términos geométricos, las tres rectas definidas por las tres ecuaciones del sistema no se intersecan en un punto. (El lector puede ver esto graficando estas ecuaciones.)

EJEMPLO 4 *Un sistema con más variables que ecuaciones.* Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + 2y - 3z + w = -2$$

$$3x - y - 2z - 4w = 1$$

$$2x + 3y - 5z + w = -3$$

Solución Obsérvese primero que el sistema dado tiene tres ecuaciones en cuatro variables, por lo que el teorema 1 b) significa que el sistema no tiene solución o posee una infinidad de soluciones. Para resolverlo, se utiliza el método de Gauss-Jordan y se llega a la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & \textcircled{-7} & 7 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 + R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La última matriz aumentada está en forma reducida por renglones. Obsérvese que el sistema dado equivale al sistema

$$x - z - w = 0$$

$$y - z + w = -1$$

de dos ecuaciones en cuatro variables; por lo tanto, se pueden despejar dos variables en términos de las otras dos. Si $z = s$ y $w = t$ (s, t parámetros), se tiene que

$$x = s + t$$

$$y = s - t - 1$$

$$z = s$$

$$w = t$$

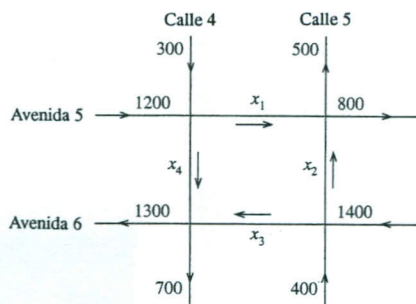
Es posible escribir soluciones en la forma $(s + t, s - t - 1, s, t)$, donde s y t son números reales arbitrarios. Geométricamente, las tres ecuaciones del sistema representan tres hiperplanos en el espacio de dimensión cuatro (ya que existen cuatro variables) y sus "puntos" de intersección están en un subespacio bidimensional (puesto que existen dos parámetros).

OBSERVACIÓN En el ejemplo 4 se asignaron parámetros a z y w en vez de x y y , dado que es más fácil despejar x y y en términos de z y w .

EJEMPLO 5 La figura 7 muestra el flujo del tránsito en el centro de una ciudad durante las horas pico de un día hábil. Las flechas indican la dirección del flujo en cada calle de un sentido; el promedio de vehículos que pasan por cada cruce por hora aparece al lado de cada calle. Las avenidas 5 y 6 pueden aceptar hasta 2000 vehículos por hora sin congestionarse, en tanto que la capacidad máxima de cada calle es de 1000 vehículos por hora. El flujo se controla por semáforos instalados en cada cruce.

- Escribir una expresión general con las tasas de flujo, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , y sugerir dos posibles patrones de flujo que garanticen que no habrá congestionamientos.
- Supóngase que la parte de la calle 4 comprendida entre las avenidas 5 y 6 se repavimentará y que el flujo de tráfico entre los dos cruces se reducirá a 300 vehículos por hora. Determinar dos posibles flujos de tráfico que garanticen un flujo suave del tráfico.

FIGURA 7
Flujo de tráfico en el centro



Solución

- Para evitar los congestionamientos, todo el tráfico que llega a un cruce debe salir del mismo. Al aplicar esta condición a cada uno de los cuatro cruces en el sentido de las manecillas del reloj —a partir del cruce de la avenida 5 y la calle 4— se obtienen las ecuaciones:

$$1500 = x_1 + x_4$$

$$1300 = x_1 + x_2$$

$$1800 = x_2 + x_3$$

$$2000 = x_3 + x_4$$

Este sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro variables x_1, x_2, x_3, x_4 se puede escribir de forma más canónica como

$$x_1 + x_4 = 1500$$

$$x_1 + x_2 = 1300$$

$$x_2 + x_3 = 1800$$

$$x_3 + x_4 = 2000$$

Al utilizar el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema, se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La última matriz aumentada está en forma reducida por renglones y equivale a un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro variables x_1, x_2, x_3, x_4 . Así, se pueden expresar tres de las variables (digamos, x_1, x_2, x_3) en términos de x_4 . Al hacer $x_4 = t$ (t es un parámetro), es posible escribir la infinidad de soluciones del sistema como

$$x_1 = 1500 - t$$

$$x_2 = -200 + t$$

$$x_3 = 2000 - t$$

$$x_4 = t$$

Obsérvese que para obtener una solución con sentido, $200 \leq t \leq 1000$, pues x_1, x_2, x_3 y x_4 deben ser todas no negativas; por ejemplo, al elegir $t = 300$ se tiene el patrón de flujo

$$x_1 = 1200, \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 1700, \quad x_4 = 300$$

Al escoger $t = 500$ se tiene el patrón de flujo

$$x_1 = 1000, \quad x_2 = 300, \quad x_3 = 1500, \quad x_4 = 500$$

- b. En este caso, x_4 no debe exceder 300. De nuevo, al usar los resultados de a), se tiene el siguiente patrón de flujo, con $x_4 = t = 300$,

$$x_1 = 1200, \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 1700, \quad x_4 = 300$$

ya obtenido. Al elegir $t = 250$ se llega al patrón de flujo

$$x_1 = 1250, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 1750, \quad x_4 = 250$$

Ejercicios de autoevaluación 5.3

1. La siguiente matriz aumentada en forma reducida por renglones equivalente a la matriz aumentada de cierto sistema de ecuaciones. Resuelva el sistema de ecuaciones usando este resultado.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$2x - 3y + z = 6$$

$$x + 2y + 4z = -4$$

$$x - 5y - 3z = 10$$

mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

3. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$2x + 3y - z = 4$$

$$x + 5y - 4z = 2$$

con el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.3 aparecen en la página 219.

5.3 EJERCICIOS

En los ejercicios 1-12, dado que la matriz aumentada en forma reducida por renglones equivale a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, determine: a) si el sistema tiene una solución, y b) la solución o soluciones del sistema, si éstas existen.

1. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$

6. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$

7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

3. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

4. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

5. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right]$

$$9. \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$10. \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$11. \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$12. \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

En los ejercicios 13-32, resuelva el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$13. \begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$15. \begin{aligned} 3x - 2y &= -3 \\ 2x + y &= 3 \\ x - 2y &= -5 \end{aligned}$$

$$17. \begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$19. \begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 7x - 14y &= 14 \\ 3x - 6y &= 6 \end{aligned}$$

$$21. \begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ -\frac{3}{2}x - y &= -2 \\ 6x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

$$14. \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - 3y &= -8 \\ x - 4y &= -9 \end{aligned}$$

$$16. \begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ x + 3y &= -2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$18. \begin{aligned} 4x + 6y &= 8 \\ 3x - 2y &= -7 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

$$20. \begin{aligned} x + 2y + z &= -2 \\ -2x - 3y - z &= 1 \\ 2x + 4y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

$$22. \begin{aligned} 3y + 2z &= 4 \\ 2x - y - 3z &= 3 \\ 2x + 2y - z &= 7 \end{aligned}$$

$$23. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \\ 3x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= -6 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$24. \begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$26. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$27. \begin{aligned} 4x + y - z &= 4 \\ 8x + 2y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

$$29. \begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 5x - 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

$$31. \begin{aligned} x + 2y - z &= -4 \\ 2x + y + z &= 7 \\ x + 3y + 2z &= 7 \\ x - 3y + z &= 9 \end{aligned}$$

$$25. \begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= -6 \end{aligned}$$

$$28. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$30. \begin{aligned} 3x - 9y + 6z &= -12 \\ x - 3y + 2z &= -4 \\ 2x - 6y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

$$32. \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$$

33. Decisiones gerenciales La gerencia de Hartman Rent-A-Car ha asignado \$840 000 para comprar 60 automóviles nuevos y agregarlos a su flota para renta. Elegirán vehículos de tamaño pequeño, medio y grande, cuyo costo respectivo es de \$10 000, \$16 000 y \$22 000 cada uno. Dé dos opciones para el comprador. (*Observación:* Las respuestas no serán únicas.)

34. Nutrición Un dietista desea planear una comida en torno de tres tipos de alimentos. La comida debe incluir 8800 unidades de vitamina A, 3380 unidades de vitamina C y 1020 unidades de calcio. Las unidades de las vitaminas y calcio contenidas en cada onza de los tres tipos de alimento se resumen en la siguiente tabla.

	Alimento I	Alimento II	Alimento III
Vitamina A	400	1200	800
Vitamina C	110	570	340
Calcio	90	30	60

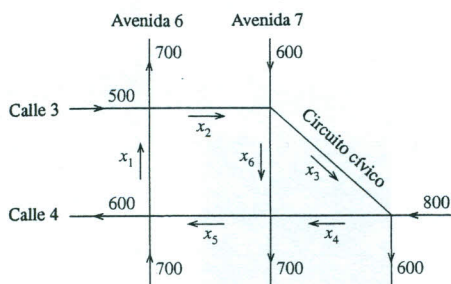
¿Cuál es la cantidad de cada tipo de alimento que se debe incluir en la dieta para cubrir las necesidades de vitaminas y calcio?

35. Nutrición Consúltase el ejercicio anterior. En lugar de considerar 3380 unidades, el dietista debe administrar 2160 unidades de la vitamina C. El resto permanece

sin alteración. Demuestre que tal ingesta no se puede planear con base en los mismos tipos de alimentos.

36. **Inversiones** Los esposos García disponen de \$100 000 para invertir en acciones, bonos y una cuenta en el mercado de dinero. Las acciones tienen un valor de recuperación de 12% por año; los bonos, 8%, la cuenta del mercado de dinero, 4%. Ellos han convenido que la cantidad invertida en acciones debe ser igual a la suma de la cantidad invertida en bonos y el triple de la suma invertida en la cuenta del mercado de dinero. ¿Cómo deben distribuir sus recursos si necesitan un ingreso anual de \$10 000 por sus inversiones?

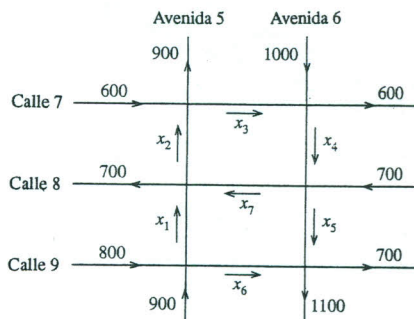
37. **Control de tráfico** La siguiente figura muestra el flujo de tráfico cerca del centro cívico de una ciudad durante las horas pico de un día hábil. Cada calle puede aceptar un máximo de 1000 vehículos por hora sin congestionarse. El flujo se controla con semáforos instalados en cada uno de los cinco cruces.



- Establezca un sistema de ecuaciones lineales que describa el flujo.
- Resuelva el sistema diseñado en a) y sugiera dos posibles patrones de flujo que garanticen que no habrá congestionamientos.
- Suponga que la parte de la avenida 7 comprendida entre las calles 3 y 4 será cerrada por reparación y proporcione un posible flujo de tráfico que garantice un flujo suave del tráfico.

38. **Control de tráfico** La figura adjunta muestra el flujo de tráfico en el centro de una ciudad durante las horas

pico de un día hábil. Cada avenida puede aceptar hasta 1500 vehículos por hora sin congestionarse, mientras que la capacidad máxima de cada calle es de 1000 vehículos por hora. El flujo del tráfico se controla con semáforos instalados en cada cruce.



- Establezca un sistema de ecuaciones lineales que describa el flujo.
- Resuelva el sistema diseñado en a) y sugiera dos posibles patrones de flujo que garanticen que no habrá congestionamientos.
- Suponga que el flujo de tráfico a lo largo de la calle 9 entre las avenidas 5 y 6, x_6 , se restringirá debido a obras de drenaje. ¿Cuál es el mínimo flujo de tráfico permisible a lo largo de esta calle que no produzca congestionamientos?

39. Determine el valor de k de modo que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tenga una solución y encuéntrelas.

$$2x + 3y = 2$$

$$x + 4y = 6$$

$$5x + ky = 2$$

40. Determine el valor de k de modo que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tenga una infinidad de soluciones y encuéntrelas.

$$3x - 2y + 4z = 12$$

$$-9x + 6y - 12z = k$$

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.3

- Sean x, y y z las variables. Entonces, la matriz aumentada reducida por renglones indica que el sistema de ecuaciones lineales equivale a las dos ecuaciones

$$x - z = 3$$

$$y + 5z = -2$$

Al hacer $z = t$, donde t es un parámetro, se tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$x = t + 3$$

$$y = -5t - 2$$

$$z = t$$

2. Se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & -3 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & -3 & 10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{smallmatrix}]{\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{array}} \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1 - 2R_2 \\ R_3 + 7R_2 \end{smallmatrix}]{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

La última matriz aumentada, que está en forma reducida por renglones, indica que el sistema dado de ecuaciones lineales equivale al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$x + 2z = 0$$

$$y + z = -2$$

Al hacer $z = t$, donde t es un parámetro, se tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$x = -2t$$

$$y = -t - 2$$

$$z = t$$

3. Se obtiene la siguiente serie de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{smallmatrix}]{\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & -14 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

Como el último renglón de la matriz aumentada final equivale a la condición $0 = 7$, lo cual es una contradicción, el sistema dado no tiene solución.

Uso de la tecnología

Se pueden utilizar las operaciones por renglón de una utilería de graficación para resolver un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas mediante el método de Gauss-Jordan —como en la pasada sección Uso de la tecnología— o usar la operación **rref** a fin de obtener la forma reducida por renglones sin realizar todos los pasos del método de Gauss-Jordan. Sin embargo, no es posible utilizar la función **SIMULT** para resolver un sistema en donde el número de ecuaciones y de variables sean distintos (véase Sec. A.5, Ap. A).

EJERCICIOS

En los ejercicios 1-6, utilice una utilería de graficación para resolver el sistema de ecuaciones a) mediante el método de Gauss-Jordan y b) con la operación **rref**.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ & 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ & -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ & 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 \\ & 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ & -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -6 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \\ & 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & 1.2x_1 - 2.3x_2 + 4.2x_3 + 5.4x_4 - 1.6x_5 = 4.2 \\ & 2.3x_1 + 1.4x_2 - 3.1x_3 + 3.3x_4 - 2.4x_5 = 6.3 \\ & 1.7x_1 + 2.6x_2 - 4.3x_3 + 7.2x_4 - 1.8x_5 = 7.8 \\ & 2.6x_1 - 4.2x_2 + 8.3x_3 - 1.6x_4 + 2.5x_5 = 6.4 \end{aligned}$$

5.4 Matrices

Uso de matrices para representar datos

Muchos problemas prácticos se resuelven manejando los datos asociados a los problemas con operaciones matemáticas. Al organizar los datos en forma adecuada como *bloques* de números, es posible efectuar estas operaciones con orden y eficiencia. Este enfoque sistemático permite aprovechar las ventajas de la computadora.

Para comenzar, considérese la forma de organizar los datos de producción mensual de un fabricante. La compañía Acrosomic produce cuatro tipos distintos de altavoces en tres lugares diferentes. La producción de mayo se resume en la tabla 1.

TABLA 1

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Planta I	320	280	460	280
Planta II	480	360	580	0
Planta III	540	420	200	880

Ahora, si se acuerda conservar la posición relativa de cada entrada de la tabla 1, el conjunto de datos se puede resumir aún más como sigue:

$$\begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

Matriz que resume los datos de la tabla 1.

Este arreglo de números es un ejemplo de *matriz*. Obsérvese que los números del primer renglón proporcionan la producción de los modelos A, B, C y D de los sistemas de altavoces Acrosonic elaborados en el lugar I; de manera análoga, los números del segundo y tercer renglones proporcionan las producciones respectivas en los lugares II y III. Los números de cada columna de la matriz indican la producción de un modelo particular de altavoces elaborado en cada uno de los sitios de producción.

Más en general, recuérdese que una matriz es un arreglo rectangular ordenado de números reales; por ejemplo, cada uno de los siguientes arreglos es una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = [1 \ 3 \ 0 \ 1]$$

Los números reales que conforman el arreglo son las *entradas*, o *elementos*, de la matriz. Las entradas de un renglón del arreglo se conocen como un *renglón* de la matriz, mientras que las entradas de una columna del arreglo son una *columna* de la matriz; por ejemplo, la matriz A tiene dos renglones y tres columnas, que se identifican como sigue:

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Renglón 1	3	0	-1
Renglón 2	2	1	4

Una matriz 2×3

El **tamaño**, o *dimensión*, de una matriz se describe en términos del número de renglones y columnas de la misma; por ejemplo, la matriz A tiene dos renglones y tres columnas, por lo que se dice que tiene tamaño 2 por 3, lo cual se denota 2×3 . En general, se dice que una matriz con n renglones y m columnas tiene tamaño $m \times n$.

Matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular ordenado de números. Una matriz con m renglones y n columnas tiene tamaño $m \times n$. La entrada del i -ésimo renglón y j -ésima columna se denota con a_{ij} .

Una matriz de tamaño $1 \times n$ (una matriz que tiene un renglón y n columnas) se conoce como **matriz renglón**, o *vector renglón*, de dimensión n ; por ejemplo, la matriz D es un vector renglón de dimensión 4. De manera análoga, una matriz con m renglones y una columna es una **matriz columna**, o *vector columna*, de dimensión m . La matriz

C es un vector columna de dimensión 4. Por último, una matriz $n \times n$ —es decir, una matriz con el mismo número de renglones que columnas— es una **matriz cuadrada**; por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 2 & \frac{1}{4} & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada 3×3

es una matriz cuadrada de tamaño 3×3 o, simplemente, de tamaño 3.

EJEMPLO 1 Considerar la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

que representa la producción de altavoces de la compañía Acrosonic, ya analizada (véase tabla 1).

- ¿Cuál es el tamaño de la matriz P ?
- Hallar a_{24} (la entrada del segundo renglón y la cuarta columna de la matriz P) e interpretación de este número.
- Encontrar la suma de las entradas que forman el primer renglón de P e interpretar el resultado.
- Hallar la suma de las entradas que forman la cuarta columna de P e interpretar el resultado.

Solución

- La matriz P tiene tres renglones y cuatro columnas, por lo que su tamaño es 3×4 .
- El número pedido está en el segundo renglón y la cuarta columna y es el número cero. Esto significa que en mayo no se produjo el modelo D de altavoz en el lugar II.
- La suma pedida está dada por

$$320 + 280 + 460 + 280 = 1340$$

lo cual da la cantidad total de altavoces fabricados en el lugar I en mayo, que es igual a 1340 unidades.

- La suma pedida está dada por

$$280 + 0 + 880 = 1160$$

lo cual da la producción de altavoces del modelo D en todas las plantas de la compañía durante mayo; esto es, 1160 unidades. ■

Igualdad de matrices

Dos matrices son *iguales* si tienen el mismo tamaño y sus entradas correspondientes son iguales; por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3-1) & 3 & 1 \\ 4 & (4+2) & 2 \end{bmatrix}$$

Además,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

puesto que la matriz de la izquierda tiene tamaño 2×3 , en tanto que la matriz de la derecha tiene tamaño 3×2 , y

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

pues los elementos correspondientes del segundo renglón y la segunda columna de ambas matrices no son iguales.

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y sus entradas correspondientes son iguales.

EJEMPLO 2 Resolver la siguiente ecuación matricial en términos de x , y y z :

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & z \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Dado que los elementos correspondientes de las dos matrices deben ser iguales, se tiene que $x = 4$, $z = 3$ y $y - 1 = 1$, o $y = 2$. ■

Suma y resta

Dos matrices A y B del mismo tamaño se pueden sumar o restar para obtener una matriz del mismo tamaño. Para esto se suman o restan las entradas correspondientes de las dos matrices; por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+4 & 4+3 \\ -1+6 & 2+1 & 0+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Suma de dos matrices del mismo tamaño

$$\text{y } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-(-1) \\ -1-3 & 3-2 \\ 4-(-1) & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Resta de dos matrices del mismo tamaño

Suma y resta de matrices

Supóngase que A y B son dos matrices del mismo tamaño.

1. La *suma* $A + B$ es la matriz obtenida al sumar las entradas correspondientes en las dos matrices.
2. La *resta* $A - B$ es la matriz obtenida al restar las entradas correspondientes en B de las de A .

EJEMPLO 3 La producción total de la compañía Acrosonic en junio se resume en la tabla 2.

TABLA 2

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Planta I	210	180	330	180
Planta II	400	300	450	40
Planta III	420	280	180	740

La producción en mayo está en la tabla 1. Determinar la producción total en mayo y junio.

Solución Como se vio, la matriz de producción para la compañía Acrosonic en mayo está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

A continuación, en la tabla 2 se ve que la matriz de producción para junio está dada por

$$B = \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix}$$

Por último, la producción total de la compañía para mayo y junio está dada por la matriz

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 530 & 460 & 790 & 460 \\ 880 & 660 & 1030 & 40 \\ 960 & 700 & 380 & 1620 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La suma de matrices cumple las siguientes leyes.

Leyes para la suma de matrices

Si A , B y C son matrices del mismo tamaño, entonces

- $A + B = B + A$ Ley conmutativa
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ Ley asociativa

La *ley conmutativa* para la suma de matrices establece que el orden en que se realiza la suma no es importante. La *ley asociativa* establece que al sumar tres matrices, conviene sumar primero A y B y luego añadir C al resultado, o, en forma equivalente, agregar A a la suma de B y C .

Una *matriz nula* es aquella en que todas las entradas son cero. La matriz nula O tiene la propiedad de que

$$A + O = O + A = A$$

para cualquier matriz que tenga el mismo tamaño que O ; por ejemplo, la matriz nula de tamaño 3×2 es

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si A es cualquier matriz 3×2 , entonces

$$A + O = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = A$$

donde a_{ij} denota la entrada del i -ésimo renglón y la j -ésima columna de la matriz A .

La matriz obtenida al intercambiar los renglones y las columnas de una matriz dada A es la *transpuesta* de A y se denota con A^T ; por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

Si A es una matriz $m \times n$ con elementos a_{ij} , entonces la **transpuesta** de A es la matriz $n \times m$ A^T con elementos a_{ji} .

Multiplicación por un escalar

Una matriz A se puede multiplicar por un número real, llamado **escalar** en el contexto del álgebra lineal. El *producto por un escalar*, denotado con cA , es una matriz obtenida al multiplicar cada entrada de A por c ; por ejemplo, el producto de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

por el escalar 3 es la matriz

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Producto por un escalar

Si A es una matriz y c es un número real, entonces el **producto escalar** cA es la matriz obtenida al multiplicar cada entrada de A por c .

EJEMPLO 4 Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz X que satisface la *ecuación matricial* $2X + B = 3A$.

Solución De la ecuación dada $2X + B = 3A$, se tiene que

$$\begin{aligned} 2X &= 3A - B \\ &= 3 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

así,

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



EJEMPLO 5 La gerencia de Acrosonic ha decidido incrementar su producción de altavoces un 10% en julio (sobre su producción en junio). Determinar una matriz que dé la producción deseada en julio.

Solución A partir de los resultados del ejemplo 3, o la producción total de Acrosonic para junio se puede representar mediante la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix}$$

La matriz pedida está dada por

$$\begin{aligned} (1.1)B &= 1.1 \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 231 & 198 & 363 & 198 \\ 440 & 330 & 495 & 44 \\ 462 & 308 & 198 & 814 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y se interpreta de la manera usual.

Ejercicios de autoevaluación 5.4

1. Efectúe las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Resuelva la siguiente ecuación matricial en términos de
- x
- ,
- y
- y
- z
- :

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ z & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-y & z \\ 2-z & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Javier tiene dos estaciones de gasolina, una en el Centro y otra en Reforma. Durante dos días consecutivos, las estaciones registraron las ventas de combustible representadas por las matrices:

		Regular sin plomo	Plus sin plomo	Super sin plomo
A =	Centro	1200	750	650
	Reforma	1100	850	600
y				
		Regular sin plomo	Plus sin plomo	Super sin plomo
B =	Centro	1250	825	550
	Reforma	1150	750	750

Halle una matriz que represente el total de ventas de las dos estaciones en el periodo de dos días.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.4 aparecen en la página 230.

5.4 EJERCICIOS

En los ejercicios 1-6, refiérase a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 & -4 \\ -11 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 9 \\ 5 & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5], \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuáles son los tamaños de A , B , C y D ?
- Encuentre a_{14} , a_{21} , a_{31} y a_{43} .
- Halle b_{13} , b_{31} y b_{43} .
- Identifique la matriz renglón. ¿Cuál es su transpuesta?

5. Identifique la matriz columna. ¿Cuál es su transpuesta?

6. Identifique la matriz cuadrada. ¿Cuál es su transpuesta?

En los ejercicios 7-12, refiérase a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. ¿Cuáles son los tamaños de A , B , C y D ?

8. Explique por qué no existe la matriz $A + C$.

9. Calcule $A + B$.

10. Calcule $2A - 3B$.

11. Calcule $C - D$.

12. Calcule $4D - 2C$.

Efectúe las operaciones indicadas en los ejercicios 13-20.

$$13. \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 \\ -11 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$16. 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$17. \begin{bmatrix} 1.2 & 4.5 & -4.2 \\ 8.2 & 6.3 & -3.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.1 & 1.5 & -3.6 \\ 2.2 & -3.3 & -4.4 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} 0.06 & 0.12 \\ 0.43 & 1.11 \\ 1.55 & -0.43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.77 & -0.75 \\ 0.22 & -0.65 \\ 1.09 & -0.57 \end{bmatrix}$$

$$19. \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -9 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$20. 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$+ 0.6 \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 21-24, determine u , x , y y z a partir de la ecuación matricial.

$$21. \begin{bmatrix} 2x-2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & y-2 \\ 2z & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & u & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$22. \begin{bmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & z \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2u & 4 \end{bmatrix}$$

$$23. \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & -3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z & 10 \\ 4 & -u \end{bmatrix}$$

$$24. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ x & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} y-1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2z+1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -4 & -u \\ 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 25 y 26, sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{y } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

25. Mediante un cálculo directo, compruebe la validez de la ley conmutativa para la suma de matrices.

26. Compruebe la validez de la ley asociativa para la suma de matrices mediante un cálculo directo.

En los ejercicios 27-39, sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Revise cada ecuación mediante un cálculo directo.

27. $(3 + 5)A = 3A + 5A$
 28. $2(4A) = (2 \cdot 4)A = 8A$
 29. $4(A + B) = 4A + 4B$
 30. $2(A - 3B) = 2A - 6B$

En los ejercicios 31-34, encuentre la transpuesta de la matriz.

31. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

35. **Niveles de colesterol** Los señores Cruz, Jiménez y Sánchez sufren una enfermedad en las coronarias. Como parte del tratamiento, se les da una dieta baja en colesterol. El señor Cruz lleva la dieta I; Jiménez la dieta II, y Sánchez con la dieta III. Se mantuvieron registros de los niveles de colesterol de cada paciente. Al principio de los meses 1, 2, 3 y 4, dichos niveles eran:
 Cruz: 220, 215, 210 y 205

Jiménez: 220, 210, 200 y 195

Sánchez: 215, 205, 195 y 190

Represente esta información en una matriz 3×4 .

36. **Inventario de una librería** El inventario de una librería universitaria es:

Pasta dura: libros de texto, 5280; ficción, 1680; no ficción, 2320; referencia, 1890

Rústica: ficción, 2810; no ficción, 1490; referencia, 2070; libros de texto, 1940

El inventario de una librería orientada al mercado preparatorio es

Pasta dura: libros de texto, 6340; ficción, 2220; no ficción, 1790; referencia, 1980

Rústica: ficción, 3100; no ficción, 1720; referencia, 2710; libros de texto, 2050

- Represente el inventario de la librería universitaria como una matriz A .
- Represente el inventario de la librería preparatoria como una matriz B .
- Si las dos deciden unirse, escriba una matriz C que represente el inventario total de la nueva compañía.

37. **Bancos** La matriz A representa los números de tres tipos de cuentas bancarias el primero de enero en el Banco Central y sus sucursales.

	Cuentas de cheques	Cuentas de ahorro	Cuentas de depósito a plazo fijo
Oficina matriz	2820	1470	1120
$A =$ Sucursal del Oeste	1030	520	480
Sucursal del Norte	1170	540	460

La matriz B representa los números y tipos de cuentas abiertas durante el primer trimestre y la matriz C se refiere a los números y tipos de cuentas cerradas durante el mismo periodo,

$$B = \begin{bmatrix} 260 & 120 & 110 \\ 140 & 60 & 50 \\ 120 & 70 & 50 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 80 \\ 70 & 30 & 40 \\ 60 & 20 & 40 \end{bmatrix}$$

- Encuentre la matriz D , la cual representa el número de cada tipo de cuenta al final del primer trimestre en cada lugar.
- Debido a la apertura de una fábrica cercana, se prevé un incremento del 10% en la cantidad de cuentas en cada lugar durante el segundo trimestre. Escriba una matriz E que refleje este incremento previsto.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.4

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Se tiene que

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ z & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-y & z \\ 2-z & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Al efectuar la operación indicada sobre el lado izquierdo, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2+x-y & 3+z \\ 2 & 2-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices, se llega a

$$2+x-y=3$$

$$3+z=7$$

$$2-z=0$$

de lo cual se deduce que $x=2$, $y=1$ y $z=4$.

3. La matriz pedida es

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 1200 & 750 & 650 \\ 1100 & 850 & 600 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1250 & 825 & 550 \\ 1150 & 750 & 750 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2450 & 1575 & 1200 \\ 2250 & 1600 & 1350 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uso de la tecnología

La utilería de graficación sirve para sumar y restar matrices, multiplicar por un escalar y hallar la transpuesta de una matriz (véanse las Secs. A.6 y A.7, Ap. A).

EJERCICIOS

En los ejercicios 1-8, refiérase a las siguientes matrices y utilice una utilería de graficación o un programa de computadora para realizar las operaciones indicadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -5.4 & 2.7 \\ 4.1 & 3.2 & 4.2 & -3.1 \\ 1.7 & 2.8 & -5.2 & 8.4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.2 & -3.2 & 1.4 & -1.2 \\ 3.1 & 2.7 & -1.2 & 1.7 \\ 1.2 & -1.4 & -1.7 & 2.8 \end{bmatrix}$$

1. $12.5A$

3. $A - B$

5. $1.3A + 2.4B$

7. $(A+B)^T$

2. $-8.4B$

4. $B - A$

6. $2.1A - 1.7B$

8. $3A^T + 4B^T$

5.5

Multiplicación de matrices

Producto matricial

En la sección 5.4 se vio la forma en que las matrices del mismo tamaño se pueden sumar y restar, y cómo multiplicar una matriz por un escalar (número real), operación conocida como producto por un escalar. En esta sección se verá la manera de multiplicar —con ciertas restricciones— una matriz por otra.

Para definir la multiplicación matricial, considérese el siguiente problema: Cierta día, la estación de servicio de Al vendió 1600 galones de gasolina regular sin plomo, 1000 galones de gasolina plus sin plomo y 800 galones de gasolina super sin plomo. Si el precio de la gasolina ese día era de \$1.04, \$1.19 y \$1.29 para las gasolinas regular, plus y super, respectivamente, determine el ingreso total de ese día.

La venta de gasolina de ese día se puede representar con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1600 & 1000 & 800 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz renglón } (1 \times 3)$$

A continuación, considérese que los precios de venta unitarios de las gasolinas regular, plus y super son las entradas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1.04 \\ 1.19 \\ 1.29 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz columna } (3 \times 1)$$

La primera entrada de la matriz A proporciona la cantidad de galones vendidos de la gasolina regular, y la primera entrada de la matriz B da el precio de venta de cada galón de esta gasolina, de modo que su producto $(1600)(1.04)$ proporciona el ingreso obtenido por la venta de gasolina regular ese día. Una interpretación similar de la segunda y tercera entradas de las dos matrices sugiere multiplicar las entradas correspondientes para obtener los ingresos respectivos obtenidos por la venta de los tres tipos de gasolina. Por último, el ingreso total se obtiene sumando estos productos para obtener

$$(1600)(1.04) + (1000)(1.19) + (800)(1.29) = 3886$$

o \$3886.

Este ejemplo sugiere que si se tiene una matriz renglón de tamaño $1 \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

y una matriz columna de tamaño $1 \times n$,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

se puede definir el *producto* de A y B , lo que se escribe AB , como

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \quad (II)$$

EJEMPLO 1 Sean

$$A = [1, -2, 3, 5] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = [1, -2, 3, 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (1)(2) + (-2)(3) + (3)(0) + (5)(-1) = -9$$

EJEMPLO 2 El número de acciones que posee Julia está dado por la matriz

$$\begin{array}{ccccc} & \text{GM} & \text{IBM} & \text{BAC} \\ A = & [700 & 400 & 200] \end{array}$$

Al cierre de la bolsa cierto día, los precios (en dólares por acción) de estas acciones es

$$B = \begin{bmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{GM} \\ \text{IBM} \\ \text{BAC} \end{array}$$

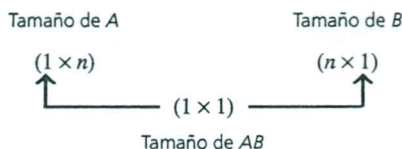
¿Cuál es el valor total de las acciones de Julia ese día?

Solución Sus acciones valen

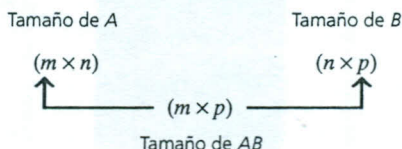
$$AB = [700 \ 400 \ 200] \begin{bmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{bmatrix} = (700)(50) + (400)(120) + (200)(42)$$

o \$91 400.

Al analizar de nuevo el producto matricial AB en la ecuación (11), obsérvese que el número de columnas de la matriz renglón A es *igual* al número de renglones de la matriz columna B . Nótese también que la matriz producto AB tiene tamaño 1×1 (un número real se puede pensar como una matriz 1×1). En forma esquemática,



En términos más generales, si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y B es una matriz de tamaño $n \times p$ (la cantidad de columnas de A es igual al número de renglones de B), entonces el **producto matricial** de A y B , —denotado AB — está bien definido y es una matriz de tamaño $m \times p$. En forma esquemática, $\uparrow\downarrow$



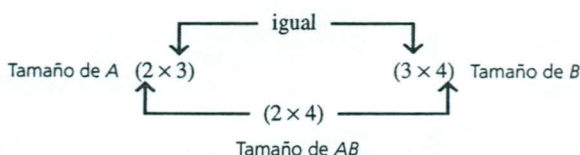
A continuación se ilustrará la mecánica de la multiplicación matricial, calculando el producto de una matriz A 2×3 y una matriz B 3×4 . Supóngase que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

Del esquema



se ve que el producto matricial $C = AB$ está bien definido (la cantidad de columnas de A es igual al número de renglones de B) y tiene tamaño 2×4 . Así,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

Las entradas de C se calculan como sigue: la entrada c_{11} (la entrada del *primer* renglón, *primera* columna de C) es el producto de la matriz renglón que comprende las entradas del *primer* renglón de A y la matriz columna formada por las entradas de la *primera* columna de B . Así,

$$c_{11} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

La entrada c_{12} (la entrada del *primer* renglón, *segunda* columna de C) es el producto de la matriz renglón que comprende las entradas del *primer* renglón de A y la matriz columna formada por las entradas de la *segunda* columna de B . Así pues,

$$c_{12} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

Las demás entradas de C se calculan de manera análoga.

EJEMPLO 3 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular AB .

Solución El tamaño de la matriz A es 2×3 , y el tamaño de la matriz B es 3×3 . Como el número de columnas de la matriz A es igual a la cantidad de renglones de la matriz B , el producto matricial $C = AB$ está definido. Además, el tamaño de la matriz C es 2×3 ; por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Ahora sólo resta determinar las entradas c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{21} , c_{22} y c_{23} . Se tiene

$$c_{11} = [3 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (3)(1) + (1)(4) + (4)(2) = 15$$

$$c_{12} = [3 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = (3)(3) + (1)(-1) + (4)(4) = 24$$

$$c_{13} = [3 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (3)(-3) + (1)(2) + (4)(1) = -3$$

$$c_{21} = [-1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1)(1) + (2)(4) + (3)(2) = 13$$

$$c_{22} = [-1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = (-1)(3) + (2)(-1) + (3)(4) = 7$$

$$y \quad c_{23} = [-1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(-3) + (2)(2) + (3)(1) = 10$$

de modo que el producto pedido AB está dado por

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & 24 & -3 \\ 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 19 & 17 \\ 0 & 11 & 7 \\ 1 & 21 & 25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 1 & + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 26 \\ 5 & 13 & 18 \\ 4 & 5 & 17 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como muestra el ejemplo anterior, en general $AB \neq BA$ para dos matrices cuadradas A y B ; sin embargo, se cumplen las siguientes leyes para la multiplicación matricial.

**Leyes para
la multiplicación
matricial**

Si los productos y sumas están definidos para las matrices A , B y C , entonces

1. $(AB)C = A(BC)$ Ley asociativa
2. $A(B + C) = AB + AC$ Ley distributiva

La matriz cuadrada de tamaño n que tiene unos a lo largo de su diagonal principal y ceros en lo demás es la **matriz identidad** de tamaño n .

Matriz identidadLa matriz identidad de tamaño n está dada por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \text{ renglones} \\ n \text{ columnas} \end{matrix}$$

La matriz identidad tiene la propiedad de que $I_n A = A$ para cualquier matriz $n \times r$ A , y $B I_n = B$ para cualquier matriz $s \times n$ B . En particular, si A es una matriz cuadrada de tamaño n , entonces

$$I_n A = A I_n = A$$

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $I_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

$$A I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

de modo que $I_3 A = A I_3$, lo que confirma el resultado en este caso particular. ■

Aplicación

EJEMPLO 6 La compañía de novedades Ace recibió un pedido del parque de diversiones Mundo Mágico por 900 pandas gigantes, 1200 San Bernardos y 2000 pájaros grandes. La gerencia de Ace ha decidido procesar 500 pandas, 800 San Bernardos y 1300 pájaros en su planta en Seúl y el resto lo cubrirá en Nuevo Laredo. Cada panda requiere 1.5 yardas cuadradas de felpa, 30 pies cúbicos de relleno y 5 piezas de adorno; cada San Bernardo requiere 2 yardas cuadradas de felpa, 35 pies cúbicos de relleno y 8 piezas de adorno, y cada pájaro necesita 2.5 yardas cuadradas de felpa, 25 pies cúbicos de relleno y 15 piezas de adorno.

La felpa cuesta \$4.50 por yarda cuadrada; el relleno, 10 centavos por pie cúbico, y el adorno, 25 centavos la unidad.

- a. Indique la cantidad de cada tipo de material que debe adquirir por cada planta.
 b. ¿Cuál es el costo total de los materiales en que incurre cada planta y el costo total de los materiales utilizados por Ace para cubrir el pedido?

Solución Las cantidades de cada tipo de animal de peluche que se producirán en cada planta se pueden expresar con una *matriz de producción* $2 \times 3 P$. Así,

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Pandas & San \text{ Bernardos} & Pájaros \end{matrix} \\ \begin{matrix} Seúl \\ Nuevo Laredo \end{matrix} & \begin{bmatrix} 500 & 800 & 1300 \\ 400 & 400 & 700 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

De manera análoga, la cantidad y tipo de material necesarios para fabricar cada tipo de animal se pueden representar con una *matriz de actividad* $3 \times 3 A$. Así,

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Felpa & Relleno & Adorno \end{matrix} \\ \begin{matrix} Pandas \\ San Bernardos \\ Pájaros \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.5 & 30 & 5 \\ 2 & 35 & 8 \\ 2.5 & 25 & 15 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por último, el costo unitario de cada tipo de material se puede representar con la *matriz de costos* $3 \times 1 C$:

$$C = \begin{matrix} \begin{matrix} Felpa \\ Relleno \\ Adorno \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.10 \\ 0.25 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- a. La cantidad de cada tipo de material necesario por planta está dada por la matriz PA . Así,

$$PA = \begin{bmatrix} 500 & 800 & 1300 \\ 400 & 400 & 700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 30 & 5 \\ 2 & 35 & 8 \\ 2.5 & 25 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} Felpa & Relleno & Adorno \end{matrix} \\ \begin{matrix} Seúl \\ Nuevo Laredo \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5,600 & 75,500 & 28,400 \\ 3,150 & 43,500 & 15,700 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- b. El costo total de los materiales para cada planta está dado por la matriz PAC :

$$PAC = \begin{bmatrix} 5,600 & 75,500 & 28,400 \\ 3,150 & 43,500 & 15,700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.10 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} \begin{matrix} Seúl \\ Nuevo Laredo \end{matrix} & \begin{bmatrix} 39,850 \\ 22,450 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

o \$39 850 para la planta en Seúl y \$22 450 para la planta en Nuevo Laredo. Así, el costo total de los materiales en que incurre Ace es \$62 300.

Representación matricial

El ejemplo 7 muestra que un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar de manera más compacta con la ayuda de matrices. (En la Sec. 5.6 se utilizará esta representación matricial de las ecuaciones.)

EJEMPLO 7 Escribir el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}2x - 4y + z &= 6 \\ -3x + 6y - 5z &= -1 \\ x - 3y + 7z &= 0\end{aligned}$$

en forma matricial.

Solución Se escribe

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que A no es más que la matriz de coeficientes 3×3 del sistema, X es la matriz columna 3×1 de las incógnitas (variables) y B es la matriz columna 3×1 de constantes. Ahora se mostrará que la representación matricial pedida del sistema de ecuaciones lineales es

$$AX = B$$

Para ver esto, conviene notar que

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 4y + z \\ -3x + 6y - 5z \\ x - 3y + 7z \end{bmatrix}$$

Al igualar esta matriz 3×1 con la matriz B se tiene

$$\begin{bmatrix} 2x - 4y + z \\ -3x + 6y - 5z \\ x - 3y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo cual, por la igualdad de las matrices, equivale al sistema dado de ecuaciones lineales. ■

Ejercicios de autoevaluación 5.5

1. Calcule

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Escriba el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma matricial.

$$\begin{aligned}y - 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 4z &= 7\end{aligned}$$

3. El 1 de julio, la cantidad de acciones propiedad de Antonio y Julia Rodríguez estaba dada por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \text{Antonio} \\ \text{Julia} \end{array} \begin{array}{cc|cc} \text{AT\&T} & \text{GTE} & \text{IBM} & \text{GM} \\ \hline 2000 & 1000 & 500 & 5000 \\ 1000 & 500 & 2000 & 0 \end{array}$$

y los respectivos precios al cierre de AT&T, GTE, IBM y GM fueron \$24, \$47, \$150 y \$14 la acción. Utilice la multiplicación matricial para hallar los valores del total de las acciones de cada cónyuge en esa fecha.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.5 aparecen en la página 243.

5.5 EJERCICIOS

En los ejercicios 1-4 se dan los tamaños de las matrices A y B . Halle el tamaño de AB y BA siempre que estos productos estén definidos.

1. A es de tamaño 2×3 y B es de tamaño 3×5
2. A es de tamaño 3×4 y B es de tamaño 4×3
3. A es de tamaño 1×7 y B es de tamaño 7×1
4. A es de tamaño 4×4 y B es de tamaño 4×4
5. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y B una matriz de tamaño $s \times t$. Encuentre condiciones sobre m , n , s y t de modo que ambos productos matriciales AB y BA estén definidos.
6. Halle condiciones sobre el tamaño de una matriz A de modo que A^2 (es decir, AA) esté definido.

En los ejercicios 7-24, calcule los productos indicados.

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$12. \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$13. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.5 & 2.1 \end{bmatrix}$$

$$16. \begin{bmatrix} 1.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.51 \end{bmatrix}$$

$$17. \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \\ 4 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$19. \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$20. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$21. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$22. \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$23. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$24. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 25 y 26, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

25. Compruebe la validez de la ley asociativa para la multiplicación de matrices.

26. Compruebe la validez de la ley distributiva para la multiplicación de matrices.

27. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule AB y BA y deduzca que la multiplicación de matrices no es conmutativa en general.

28. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Calcule AB .

b. Calcule AC .

c. Con los resultados de a) y b) concluya que $AB = AC$ no significa que $B = C$.

29. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Muestre que $AB = O$, lo cual demuestra que, para la multiplicación de matrices, la ecuación $AB = O$ no significa que una o ambas matrices A y B deban ser la matriz nula.

30. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Muestre que $A^2 = O$. Compare esto con la ecuación $a^2 = 0$, donde a es un número real.

31. Halle la matriz A tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

32. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Calcule $(A+B)^2$.

b. Calcule $A^2 + 2AB + B^2$.

c. Con base en los resultados de a) y b), muestre que, en general, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

33. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Halle A^T y muestre que $(A^T)^T = A$.

b. Muestre que $(A+B)^T = A^T + B^T$.

c. Muestre que $(AB)^T = B^T A^T$.

34. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre A^T y muestre que $(A^T)^T = A$.

b. Muestre que $(A+B)^T = A^T + B^T$.

c. Muestre que $(AB)^T = B^T A^T$.

En los ejercicios 35-40, escriba el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial.

$$\begin{aligned} 35. \quad 2x - 3y &= 7 \\ 3x - 4y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad 2x &= 7 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 37. \quad 2x - 3y + 4z &= 6 \\ 2y - 3z &= 7 \\ x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38. \quad x - 2y + 3z &= -1 \\ 3x + 4y - 2z &= 1 \\ 2x - 3y + 7z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39. \quad -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40. \quad 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 12 \\ -x_1 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

41. **Ingresos en taquilla** Cinema Center tiene cuatro salas, de la I a la IV. El precio de cada función es de \$2 por niño, \$3 por estudiante y \$4 por adulto. La asistencia a la matiné del domingo está dada por la matriz

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Niño} & \text{Estudiante} & \text{Adulto} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Sala I} \\ \text{Sala II} \\ \text{Sala III} \\ \text{Sala IV} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 225 & 110 & 50 \\ 75 & 180 & 225 \\ 280 & 85 & 110 \\ 0 & 250 & 225 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Escriba un vector columna B que represente el precio de la entrada. Luego, calcule AB , el vector columna que representa el ingreso bruto de cada sala. Por último, encuentre el ingreso total por concepto de entradas en dicha matiné.

42. **Bienes raíces** B y B, S.A. de C.V., empresa de bienes raíces, construye casas en tres estados. El número proyectado de unidades habitacionales de cada modelo por construir en cada estado está dado por la matriz

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Modelo} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{D.F.} \\ \text{Nuevo León} \\ \text{Saltillo} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 60 & 80 & 120 & 40 \\ 20 & 30 & 60 & 10 \\ 10 & 15 & 30 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Las ganancias proyectadas son \$20 000, \$22 000, \$25 000 y \$30 000, respectivamente, para cada modelo de casa, del I al IV.

- Escriba una matriz columna B que represente la ganancia para cada tipo de casa.
- Encuentre la utilidad total esperada por B y B, S.A. de C.V., en cada estado, si se venden todas las casas.

43. **Política: afiliación de votantes** La matriz A da el porcentaje de votantes elegibles en la ciudad de Newton, clasificados según su afiliación partidista y grupo de edad.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Dem.} & \text{Rep.} & \text{Ind.} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Menor de 30} \\ 30 \text{ a } 50 \\ \text{Mayor de 50} \end{matrix} & \begin{bmatrix} .50 & .30 & .20 \\ .45 & .40 & .15 \\ .40 & .50 & .10 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La población de votantes elegibles en la ciudad por grupo etario está dado por la matriz B :

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Menor de 30} & 30 \text{ a } 50 & \text{Mayor de 50} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 30\ 000 \\ 40\ 000 \\ 20\ 000 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 30\ 000 & 40\ 000 & 20\ 000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Halle una matriz que proporcione el número total de votantes elegibles en la ciudad que votarán por un candidato demócrata, republicano o independiente.

44. **Admisiones a una universidad** Un comité de admisión de una universidad anticipa la inscripción de 8000 estudiantes de primer ingreso para el próximo año. Para satisfacer las cuotas de ingreso, se ha clasificado a los futuros estudiantes según sexo y lugar de residencia. El número de estudiantes en cada categoría está dado por la matriz

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Hombre} & \text{Mujer} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Local} \\ \text{Foráneo} \\ \text{Extranjero} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2700 & 3000 \\ 800 & 700 \\ 500 & 300 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Al utilizar los datos acumulados de años anteriores, el comité de admisión considera que estos estudiantes optarán por asistir a la Facultad de Letras y Ciencias, a la Facultad de Artes, la Escuela de Administración y la Escuela de Ingeniería según los porcentajes que aparecen en la matriz:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{L. y C.} & \text{Artes} & \text{Admón.} & \text{Ingeniería} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Hombre} \\ \text{Mujer} \end{matrix} & \begin{bmatrix} .25 & .20 & .30 & .25 \\ .30 & .35 & .25 & .10 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Encuentre la matriz AB que muestra el número de estudiantes locales, foráneos y extranjeros que se espera que se inscribirán en cada facultad o escuela.

45. **Planeación de la producción** Consulte el ejemplo 6. Suponga que la compañía Ace ha recibido un pedido de otro parque de diversiones de 1200 panteras rosas, 1800 pandas gigantes y 1400 pájaros. La cantidad de

cada tipo de animal que procesará cada planta aparece en la siguiente matriz de producción:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Panteras} & \text{Pandas} & \text{Pájaros} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Seúl} \\ P = \text{Nvo. Laredo} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 700 & 1000 & 800 \\ 500 & 800 & 600 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cada pantera requiere 1.3 yardas cuadradas de felpa, 20 pies cúbicos de relleno y 12 piezas de adorno. Suponga

que los materiales necesarios para producir los otros dos animales y el costo unitario de cada tipo de material son iguales a los dados en el ejemplo 6.

- Indique la cantidad de cada tipo de material que cada planta debe adquirir.
- Dé el gasto total en que cada planta ha de incurrir en relación con los materiales.
- Halle el costo total de los materiales necesarios en que debe incurrir Ace para cubrir el pedido.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.5

1. Se calcula

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(3) + 3(2) + 0(1) & 1(1) + 3(0) + 0(2) & 1(4) + 3(3) + 0(-1) \\ 2(3) + 4(2) - 1(1) & 2(1) + 4(0) - 1(2) & 2(4) + 4(3) - 1(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 13 & 0 & 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema dado se puede escribir como la ecuación matricial

$$AX = B$$

3. Se escribe

$$B = \begin{bmatrix} 24 \\ 47 \\ 150 \\ 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{AT\&T} \\ \text{GTE} \\ \text{IBM} \\ \text{GM} \end{matrix}$$

se calcula

$$\begin{aligned} AB &= \begin{matrix} \text{Antonio} \\ \text{Julia} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2000 & 1000 & 500 & 5000 \\ 1000 & 500 & 2000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 47 \\ 150 \\ 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 240,000 \\ 347,500 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Antonio} \\ \text{Julia} \end{matrix} \end{aligned}$$

Se concluye que el 1 de julio las acciones de Antonio valían \$240 000 y las de Julia \$347 500.

U s o d e l a t e c n o l o g í a

La utilería de graficación sirve para multiplicar matrices. En los ejercicios 1-8, haga referencia a las siguientes matrices y use una utilería de graficación o un programa de computadora para efectuar las operaciones indicadas. Exprese sus respuestas con una precisión de dos cifras decimales.

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -1.2 & 4.3 \\ 7.2 & 6.3 & 1.8 & -2.1 \\ 0.8 & 3.2 & -1.3 & 2.8 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 1.2 & -0.8 \\ 1.2 & 1.7 & 3.5 & 4.2 \\ -3.3 & -1.2 & 4.2 & 3.2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.8 & 7.1 & 6.2 \\ 3.3 & -1.2 & 4.8 \\ 1.3 & 2.8 & -1.5 \\ 2.1 & 3.2 & -8.4 \end{bmatrix}$$

1. AC

2. CB

3. $(A+B)C$

4. $(2A+3B)C$

5. $(2A-3.1B)C$

6. $C(2.1A+3.2B)$

7. $(AC)^T$

8. $(CA)^T$

En los ejercicios 9-12, haga referencia a las siguientes matrices y efectúe las operaciones indicadas con una utilería de graficación o un programa de computadora. Exprese sus respuestas con una precisión de dos cifras decimales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 8 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ -5 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6.2 & 7.3 & -4.0 & 7.1 & 9.3 \\ 4.8 & 6.5 & 8.4 & -6.3 & 8.4 \\ 5.4 & 3.2 & 6.3 & 9.1 & -2.8 \\ 8.2 & 7.3 & 6.5 & 4.1 & 9.8 \\ 10.3 & 6.8 & 4.8 & -9.1 & 20.4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.6 & 3.9 & 8.4 & 6.1 & 9.8 \\ 2.4 & -6.8 & 7.9 & 11.4 & 2.9 \\ 7.1 & 9.4 & 6.3 & 5.7 & 4.2 \\ 3.4 & 6.1 & 5.3 & 8.4 & 6.3 \\ 7.1 & -4.2 & 3.9 & -6.4 & 7.1 \end{bmatrix},$$

9. Halle AB y BA .

10. Encuentre CD y DC . ¿Es cierto que $CD = DC$?

11. Halle $AC + AD$.

12. Encuentre

a. AC

b. AD

c. $A(C+D)$

d. ¿Es cierto que $A(C+D) = AC + AD$?

5.6

La inversa de una matriz cuadrada

La inversa de una matriz cuadrada

En esta sección se analizará un procedimiento para hallar la de una matriz inversa y se mostrará la forma de utilizarla para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Recuérdese que si a es un número real distinto de cero, entonces hay un único número real a^{-1} (es decir, $1/a$) tal que

$$a^{-1}a = \left(\frac{1}{a}\right)(a) = 1$$

El uso del inverso de un número real permite resolver ecuaciones algebraicas de la forma

$$ax = b \quad (12)$$

Ya que si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = 1/a$. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (12) por a^{-1} , se tiene

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b,$$

$$o \quad \left(\frac{1}{a}\right)(ax) = \frac{1}{a}(b)$$

$$y \quad x = \frac{b}{a}$$

Por ejemplo, como el inverso de 2 es $2^{-1} = 1/2$, se puede resolver la ecuación

$$2x = 5$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por $2^{-1} = 1/2$, de donde resulta

$$2^{-1}(2x) = 2^{-1} \cdot 5$$

$$o \quad x = \frac{5}{2}$$

Es posible usar un procedimiento similar a fin de resolver la ecuación matricial

$$AX = B$$

donde A , X y B son matrices de los tamaños adecuados. Para lograr esto, se necesita el equivalente matricial del inverso de un número real. Tal matriz, cuando existe, se llama *inversa de una matriz*.

Inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n . Una matriz cuadrada A^{-1} de tamaño n tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

es la **inversa** de A .

Ahora se mostrará que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene como inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

se ve que A^{-1} es la inversa de A , según se había afirmado.

No toda matriz cuadrada tiene una inversa. Una inversa que no tiene una inversa se denomina **singular**. Un ejemplo de matriz singular es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si B tuviese una inversa dada por

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y d son ciertos números adecuados, entonces, por la definición de una inversa, se tendría $BB^{-1} = I$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual significa que $0 = 1$, y esto es imposible. Esta contradicción hace ver que B no tiene una inversa.

Un método para hallar la inversa de una matriz cuadrada

Los métodos de la sección 5.5 sirven para encontrar la inversa de una matriz no singular. A fin de descubrir el algoritmo correspondiente, se hallará la inversa de la matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Supóngase que A^{-1} existe y que está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde hay que determinar a, b, c y d . Por la definición de una inversa, se tiene $AA^{-1} = I$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que se puede simplificar como

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+3c & -b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero esta ecuación matricial equivale a los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases}$$

con matrices aumentadas dadas por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \text{ y } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Nótese que las matrices de coeficientes de los dos sistemas son idénticas. Esto sugiere que se resuelvan los dos sistemas de ecuaciones lineales simultáneas escribiendo la siguiente matriz aumentada, la cual se obtiene al unir la matriz de coeficientes con las dos columnas de constantes:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Al utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente serie de matrices equivalentes:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] &\xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Así pues, $a = 3/5$, $c = 1/5$, $b = -2/5$ y $d = 1/5$, de donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Los siguientes cálculos confirman que A^{-1} es la inversa de A :

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array} \right]$$

Este ejemplo sugiere el siguiente algoritmo general para calcular la inversa de una matriz cuadrada de tamaño n , cuando dicha inversa exista.

Para hallar la inversa de una matriz

Dada la matriz A $n \times n$:

1. Agregar la matriz identidad I de $n \times n$ a fin de obtener la matriz aumentada

$$[A \mid I]$$

2. Usar una serie de operaciones de renglón para reducir $[A \mid I]$ a la forma

$$[I \mid B]$$

de ser posible.

La matriz B es la inversa de A .

Puesto que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

se ve que A^{-1} es la inversa de A , según se había afirmado.

No toda matriz cuadrada tiene una inversa. Una inversa que no tiene una inversa se denomina **singular**. Un ejemplo de matriz singular es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si B tuviese una inversa dada por

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde a , b , c y d son ciertos números adecuados, entonces, por la definición de una inversa, se tendría $BB^{-1} = I$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual significa que $0 = 1$, y esto es imposible. Esta contradicción hace ver que B no tiene una inversa.

Un método para hallar la inversa de una matriz cuadrada

Los métodos de la sección 5.5 sirven para encontrar la inversa de una matriz no singular. A fin de descubrir el algoritmo correspondiente, se hallará la inversa de la matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Supóngase que A^{-1} existe y que está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde hay que determinar a , b , c y d . Por la definición de una inversa, se tiene $AA^{-1} = I$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que se puede simplificar como

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+3c & -b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero esta ecuación matricial equivale a los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases}$$

con matrices aumentadas dadas por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \text{ y } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Nótese que las matrices de coeficientes de los dos sistemas son idénticas. Esto sugiere que se resuelvan los dos sistemas de ecuaciones lineales simultáneas escribiendo la siguiente matriz aumentada, la cual se obtiene al unir la matriz de coeficientes con las dos columnas de constantes:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Al utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente serie de matrices equivalentes:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] &\xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Así pues, $a = 3/5$, $c = 1/5$, $b = -2/5$ y $d = 1/5$, de donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Los siguientes cálculos confirman que A^{-1} es la inversa de A :

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array} \right]$$

Este ejemplo sugiere el siguiente algoritmo general para calcular la inversa de una matriz cuadrada de tamaño n , cuando dicha inversa exista.

Para hallar la inversa de una matriz

Dada la matriz A $n \times n$:

1. Agregar la matriz identidad I de $n \times n$ a fin de obtener la matriz aumentada

$$[A \mid I]$$

2. Usar una serie de operaciones de renglón para reducir $[A \mid I]$ a la forma

$$[I \mid B]$$

de ser posible.

La matriz B es la inversa de A .

OBSERVACIÓN Aunque la multiplicación de matrices no suele ser conmutativa, es posible mostrar que si $AB = I$, entonces $BA = I$ también; por lo tanto, para comprobar que B es la inversa de A , basta mostrar que $AB = I$. □

EJEMPLO 1 Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Se forma la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y se utiliza el método de eliminación de Gauss-Jordan para reducirla a la forma $[I|B]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -R_1 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + R_3 \\ R_2 + R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El lector debe comprobar estos resultados.

El ejemplo 2 ilustra lo que ocurre al proceso de reducción cuando una matriz A no posee una inversa.

EJEMPLO 2 Encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución Se forma la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y se aplica el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Como todas las entradas del último renglón de la submatriz 3×3 correspondientes al lado izquierdo de la matriz aumentada recién obtenida son iguales a cero, ésta última no se puede reducir a la forma $[I|B]$. De acuerdo con esto, se concluye que A es singular; es decir, no tiene inversa. ■

En términos generales, se tiene el siguiente criterio para determinar si no existe la inversa de una matriz.

**Matrices que
no tienen inversas**

Si hay un renglón a la izquierda de la línea vertical en la matriz aumentada que sólo contenga ceros, entonces la matriz no tiene una inversa.

**Una fórmula para la inversa
de una matriz 2×2**

Antes de revisar algunas aplicaciones, se mostrará un método alternativo basado en una fórmula para hallar la inversa de una matriz 2×2 . Este método será de utilidad en muchas situaciones; en el ejemplo 5 se verá una aplicación. La deducción de esta fórmula queda como práctica (Ejer. 40).

**Fórmula para la inversa
de una matriz 2×2**

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Supóngase que $D = ad - bc$ no es igual a cero. Entonces A^{-1} existe y está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (13)$$

OBSERVACIÓN Como ayuda para memorizar la fórmula, nótese que D es el producto de los elementos a lo largo de la diagonal principal menos el producto de los elementos a lo largo de la otra diagonal:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad D = ad - bc$$

↖ Diagonal principal

A continuación se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

intercambiando a y d y cambiando los signos de b y c . Por último, se obtiene A^{-1} dividiendo esta matriz entre D . □

EJEMPLO 3 Hallar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución Primero se calcula $D = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6 = -2$. Luego se escribe la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, al dividir esta matriz entre D se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución de sistemas de ecuaciones mediante inversas

Ahora se mostrará la forma de usar la inversa de una matriz a fin de resolver ciertos sistemas de ecuaciones lineales en que la cantidad de ecuaciones del sistema es igual al número de variables. Con objeto de simplificar la exposición, se ilustrará el proceso para un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Se puede escribir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

El lector debe comprobar que el sistema (14) de ecuaciones lineales se puede escribir en la forma de la ecuación matricial

$$AX = B \quad (15)$$

Si A es no singular, entonces el método de esta sección sirve para calcular A^{-1} . Después se multiplican ambos lados de (15) por A^{-1} (a la izquierda) y se obtiene

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{o} \quad IX = A^{-1}B \quad \text{o} \quad X = A^{-1}B$$

que es la solución del problema.

En el caso de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, se tiene el siguiente resultado más general.

**Uso de inversas
para resolver sistemas
de ecuaciones**

Si $AX = B$ es un sistema lineal de n ecuaciones en n incógnitas, y si A^{-1} existe, entonces

$$X = A^{-1}B$$

es la solución única del sistema.

El uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones tiene una ventaja particular cuando hay que resolver más de un sistema de ecuaciones, $AX = B$, que comprendan a la misma matriz de coeficientes A y diferentes matrices de constantes B . Como se verá en los ejemplos 4 y 5, en cada caso sólo hay que calcular una vez A^{-1} .

Aplicaciones

EJEMPLO 4 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $2x + y + z = 1$

b. $2x + y + z = 2$

$3x + 2y + z = 2$

$3x + 2y + z = -3$

$2x + y + 2z = -1$

$2x + y + 2z = 1$

Solución Estos sistemas de ecuaciones se pueden escribir en la forma

$$AX = B \quad \text{y} \quad AX = C$$

respectivamente, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz A ,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se halló en el ejemplo 1. Al utilizar este resultado, se tiene que la solución del primer sistema es

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(1) + (-1)(2) + (-1)(-1) \\ (-4)(1) + (2)(2) + (1)(-1) \\ (-1)(1) + (0)(2) + (1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

o $x = 2$, $y = -1$ y $z = -2$.

La solución del segundo sistema es

$$X = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

o $x = 8$, $y = -13$ y $z = -1$.



EJEMPLO 5 La gerencia de Checkers Rent-A-Car planea ampliar su flota de automóviles durante el próximo trimestre, adquiriendo autos compactos y grandes. El costo promedio de un compacto es \$7 000 y de un auto grande, \$15 000.

- Si hay que comprar un total de 800 autos con un presupuesto de \$9 millones, ¿cuántos autos de cada tamaño se comprarán?
- Si la demanda esperada indica que deben adquirirse 1 000 unidades con un presupuesto de \$10 millones, ¿cuántos autos de cada tipo se adquirirán?

Solución Sean x y y los autos compactos y grandes por adquirir. Además, sea n el número total de autos por comprar y b la cantidad de dinero presupuestada para la adquisición. Entonces

$$x + y = n$$

$$7\,000x + 15\,000y = b$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos variables se puede escribir en la forma matricial

$$AX = B$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7\,000 & 15\,000 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$X = A^{-1}B$$

Puesto que A es una matriz 2×2 , es posible hallar su inversa con la fórmula (13). Se tiene que $D = (1)(15\,000) - (7\,000)(1) = 8\,000$, de modo que

$$A^{-1} = \frac{1}{8\,000} \begin{bmatrix} 15\,000 & -1 \\ -7\,000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15\,000}{8\,000} & -\frac{1}{8\,000} \\ -\frac{7\,000}{8\,000} & \frac{1}{8\,000} \end{bmatrix}$$

Así,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{1}{8\,000} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{8\,000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix}$$

- En este caso, $n = 800$ y $b = 9\,000\,000$, de modo que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{1}{8\,000} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{8\,000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 9\,000\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 375 \\ 425 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, en este caso se comprarán 375 autos compactos y 425 vehículos grandes.

- b. Aquí, $n = 1\,000$ y $b = 10\,000\,000$, de modo que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{1}{8000} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{8000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 10\,000\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 625 \\ 375 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se adquirirán 625 autos compactos y 375 grandes.

Ejercicios de autoevaluación 5.6

1. Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

si ésta existe.

2. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$2x + y - z = b_1$$

$$x + y - z = b_2$$

$$-x - 2y + 3z = b_3$$

donde (a) $b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $b_3 = -8$ y (b) $b_1 = 2$, $b_2 = 0$, $b_3 = 5$ hallando la inversa de la matriz de coeficientes.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.6 aparecen en la página 256.

5.6 EJERCICIOS

En los ejercicios 1-4, muestre que las matrices son inversas entre sí, haciendo ver que su producto es la matriz identidad I .

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5-16, encuentre la inversa de la matriz, si ésta existe. Compruebe su respuesta.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$13. \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$16. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 17-24, a) escriba una ecuación matricial que equivalga al sistema de ecuaciones lineales y b) resuelva el sistema utilizando las inversas determinadas en los ejercicios 5-16.

$$17. 2x + 5y = 3$$

$$x + 3y = 2$$

(Véase Ejer. 5.)

$$18. 2x + 3y = 5$$

$$3x + 5y = 8$$

(Véase Ejer. 6.)

$$19. 2x - 3y - 4z = 4$$

$$-z = 3$$

$$x - 2y + z = -8$$

(Véase Ejer. 9.)

$$20. x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

(Véase Ejer. 10.)

$$21. x + 4y - z = 3$$

$$2x + 3y - 2z = 1$$

$$-x + 2y + 3z = 7$$

(Véase Ejer. 13.)

$$22. 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 6$$

$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4$$

$$6x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 4$$

(Véase Ejer. 14.)

$$23. x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 9$$

(Véase Ejer. 15.)

$$24. x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 = 11$$

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

(Véase Ejer. 16.)

En los ejercicios 25-32, a) escriba cada sistema de ecuaciones como una ecuación matricial y b) resuelva el sistema de ecuaciones utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

$$25. \quad \begin{aligned} x + 2y &= b_1 \\ 2x - y &= b_2 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 14, b_2 = 5$

y ii. $b_1 = 4, b_2 = -1$

$$26. \quad \begin{aligned} 3x - 2y &= b_1 \\ 4x + 3y &= b_2 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = -6, b_2 = 10$

y ii. $b_1 = 3, b_2 = -2$

$$27. \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= b_1 \\ x + y + z &= b_2 \\ 3x + y + z &= b_3 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 7, b_2 = 4, b_3 = 2$

y ii. $b_1 = 5, b_2 = -3, b_3 = -1$

$$28. \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 5, b_2 = -3, b_3 = -1$

y ii. $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = -2$

$$29. \quad \begin{aligned} 3x + 2y - z &= b_1 \\ 2x - 3y + z &= b_2 \\ x - y - z &= b_3 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 2, b_2 = -2, b_3 = 4$

y ii. $b_1 = 8, b_2 = -3, b_3 = 6$

$$30. \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= b_2 \\ -x_1 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = -3$

y ii. $b_1 = 2, b_2 = -5, b_3 = 0$

$$31. \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= b_1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= b_2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= b_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 4, b_4 = 0$

y ii. $b_1 = 2, b_2 = 8, b_3 = 4, b_4 = -1$

$$32. \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= b_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + x_4 &= b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 &= b_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

donde i. $b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 5, b_4 = 7$

y ii. $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0, b_4 = -4$

33. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- a. Halle A^{-1} .
b. Muestre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

34. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

- a. Encuentre AB , A^{-1} , B^{-1} .
b. Muestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

35. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a. Halle ABC , A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} .
b. Muestre que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

36. **Ingresos por boletaje** Cruceros Punto Arco Iris cobra \$8 por adulto y \$4 por niño por un boleto de viaje redondo. Los registros muestran que cierto fin de semana, 1000 personas abordaron el crucero el sábado y 800 personas el domingo. Los ingresos totales del sábado fueron de \$6400 y \$4800 el domingo. ¿Cuántos adultos y niños abordaron el crucero esos días?

37. **Precios** La compañía editora Bel Air publica una edición de lujo en piel y una edición económica de su Organizador Diario. El departamento de mercadotecnia estima que la demanda mensual de estas agendas será de x ejemplares de la edición de lujo y y ejemplares de la edición económica, si los precios unitarios son p y q dólares, respectivamente, donde x , y , p y q se relacionan mediante el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$5x + y = 1000(70 - p)$$

$$x + 3y = 1000(40 - q)$$

Encuentre la demanda mensual de ambas ediciones cuando los precios unitarios se establecen de acuerdo con los siguientes planes:

- a. $p = 50$ y $q = 25$
b. $p = 45$ y $q = 25$
c. $p = 45$ y $q = 20$

38. **Nutrición y planeación de dietas** Roberto, nutriólogo del Centro Médico Universitario, debe planear dietas especiales para dos pacientes, Susana y Tomás. Roberto ha decidido que las comidas de Susana deben

contener al menos 400 mg de calcio, 20 mg de hierro y 50 mg de vitamina C, mientras que los alimentos de Tomás han de contener al menos 350 mg de calcio, 15 mg de hierro y 40 mg de vitamina C. Roberto también ha decidido que las comidas se preparen con tres alimentos básicos: A, B y C. Los contenidos nutricionales especiales de estos alimentos aparecen en la tabla anexa. Indique la cantidad de onzas de cada tipo de alimento que deben dar en una comida de modo que se cumplan los requisitos mínimos de calcio, hierro y vitamina C para cada paciente

	Contenido en mg/ oz		
	Calcio	Hierro	Vitamina C
Alimento A	30	1	2
Alimento B	25	1	5
Alimento C	20	2	4

39. **Fondos para investigación** La Fundación Carver proporciona fondos a tres organizaciones no lucrativas orientadas a la investigación de energía alternativa. La tabla que sigue contiene los datos relativos a la proporción de fondos que cada institución destina a la investigación de la energía solar, la energía obtenida del viento y la energía del movimiento de las mareas.

	Proporción de dinero gastado		
	Solar	Viento	Mareas
Organización I	0.6	0.3	0.1
Organización II	0.4	0.3	0.3
Organización III	0.2	0.6	0.2

Encuentre la cantidad otorgada a cada organización si la cantidad total utilizada por las tres organizaciones en la investigación de la energía solar, del viento y de las mareas es

- a. \$9.2 millones, \$9.6 millones y \$5.2 millones, respectivamente
b. \$8.2 millones, \$7.2 millones y \$3.6 millones, respectivamente

40. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- a. Halle A^{-1} .
b. Encuentre la condición necesaria para que A sea no singular.
c. Compruebe que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$13. \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$16. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 17-24, a) escriba una ecuación matricial que equivalga al sistema de ecuaciones lineales y b) resuelva el sistema utilizando las inversas determinadas en los ejercicios 5-16.

$$17. 2x + 5y = 3$$

$$x + 3y = 2$$

(Véase Ejer. 5.)

$$18. 2x + 3y = 5$$

$$3x + 5y = 8$$

(Véase Ejer. 6.)

$$19. 2x - 3y - 4z = 4$$

$$-z = 3$$

$$x - 2y + z = -8$$

(Véase Ejer. 9.)

$$20. \begin{matrix} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{matrix}$$

$$(Véase Ejer. 10.)$$

$$21. \begin{matrix} x + 4y - z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 7 \end{matrix}$$

$$(Véase Ejer. 13.)$$

$$22. \begin{matrix} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 6x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 4 \end{matrix}$$

$$(Véase Ejer. 14.)$$

$$23. \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \end{matrix}$$

$$(Véase Ejer. 15.)$$

$$24. \begin{matrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 11 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{matrix}$$

$$(Véase Ejer. 16.)$$

En los ejercicios 25-32, a) escriba cada sistema de ecuaciones como una ecuación matricial y b) resuelva el sistema de ecuaciones utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

$$25. \begin{matrix} x + 2y = b_1 \\ 2x - y = b_2 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 14, b_2 = 5$$

$$y \quad ii. b_1 = 4, b_2 = -1$$

$$26. \begin{matrix} 3x - 2y = b_1 \\ 4x + 3y = b_2 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = -6, b_2 = 10$$

$$y \quad ii. b_1 = 3, b_2 = -2$$

$$27. \begin{matrix} x + 2y + z = b_1 \\ x + y + z = b_2 \\ 3x + y + z = b_3 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 7, b_2 = 4, b_3 = 2$$

$$y \quad ii. b_1 = 5, b_2 = -3, b_3 = -1$$

$$28. \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = b_3 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 5, b_2 = -3, b_3 = -1$$

$$y \quad ii. b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = -2$$

$$29. \begin{matrix} 3x + 2y - z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ x - y - z = b_3 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 2, b_2 = -2, b_3 = 4$$

$$y \quad ii. b_1 = 8, b_2 = -3, b_3 = 6$$

$$30. \begin{matrix} 2x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = b_2 \\ -x_1 + x_3 = b_3 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = -3$$

$$y \quad ii. b_1 = 2, b_2 = -5, b_3 = 0$$

$$31. \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = b_4 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 4, b_4 = 0$$

$$y \quad ii. b_1 = 2, b_2 = 8, b_3 = 4, b_4 = -1$$

$$32. \begin{matrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = b_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = b_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = b_4 \end{matrix}$$

$$\text{donde } i. b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 5, b_4 = 7$$

$$y \quad ii. b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0, b_4 = -4$$

33. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- a. Halle A^{-1} .
b. Muestre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

34. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

- a. Encuentre AB , A^{-1} , B^{-1} .
b. Muestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

35. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a. Halle ABC , A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} .
b. Muestre que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

36. **Ingresos por boletaje** Cruceros Punto Arco Iris cobra \$8 por adulto y \$4 por niño por un boleto de viaje redondo. Los registros muestran que cierto fin de semana, 1000 personas abordaron el crucero el sábado y 800 personas el domingo. Los ingresos totales del sábado fueron de \$6400 y \$4800 el domingo. ¿Cuántos adultos y niños abordaron el crucero esos días?

37. **Precios** La compañía editora Bel Air publica una edición de lujo en piel y una edición económica de su Organizador Diario. El departamento de mercadotecnia estima que la demanda mensual de estas agendas será de x ejemplares de la edición de lujo y y ejemplares de la edición económica, si los precios unitarios son p y q dólares, respectivamente, donde x , y , p y q se relacionan mediante el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$5x + y = 1000(70 - p)$$

$$x + 3y = 1000(40 - q)$$

Encuentre la demanda mensual de ambas ediciones cuando los precios unitarios se establecen de acuerdo con los siguientes planes:

- a. $p = 50$ y $q = 25$
b. $p = 45$ y $q = 25$
c. $p = 45$ y $q = 20$

38. **Nutrición y planeación de dietas** Roberto, nutriólogo del Centro Médico Universitario, debe planear dietas especiales para dos pacientes, Susana y Tomás. Roberto ha decidido que las comidas de Susana deben

contener al menos 400 mg de calcio, 20 mg de hierro y 50 mg de vitamina C, mientras que los alimentos de Tomás han de contener al menos 350 mg de calcio, 15 mg de hierro y 40 mg de vitamina C. Roberto también ha decidido que las comidas se preparen con tres alimentos básicos: A, B y C. Los contenidos nutricionales especiales de estos alimentos aparecen en la tabla anexa. Indique la cantidad de onzas de cada tipo de alimento que deben dar en una comida de modo que se cumplan los requisitos mínimos de calcio, hierro y vitamina C para cada paciente

	Contenido en mg/ oz		
	Calcio	Hierro	Vitamina C
Alimento A	30	1	2
Alimento B	25	1	5
Alimento C	20	2	4

39. **Fondos para investigación** La Fundación Carver proporciona fondos a tres organizaciones no lucrativas orientadas a la investigación de energía alternativa. La tabla que sigue contiene los datos relativos a la proporción de fondos que cada institución destina a la investigación de la energía solar, la energía obtenida del viento y la energía del movimiento de las mareas.

	Proporción de dinero gastado		
	Solar	Viento	Mareas
Organización I	0.6	0.3	0.1
Organización II	0.4	0.3	0.3
Organización III	0.2	0.6	0.2

Encuentre la cantidad otorgada a cada organización si la cantidad total utilizada por las tres organizaciones en la investigación de la energía solar, del viento y de las mareas es

- a. \$9.2 millones, \$9.6 millones y \$5.2 millones, respectivamente
b. \$8.2 millones, \$7.2 millones y \$3.6 millones, respectivamente

40. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- a. Halle A^{-1} .
b. Encuentre la condición necesaria para que A sea no singular.
c. Compruebe que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.6

1. Se forma la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y se reduce por renglones como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

De los resultados anteriores se tiene que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. a. Se escriben los sistemas de ecuaciones lineales en la forma matricial

$$AX = B_1$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Con los resultados del ejercicio 1, se tiene

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$.

b. En este caso, A y X son como en a), pero

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

o $x=2$, $y=1$ y $z=3$.

U s o d e l a t e c n o l o g í a

La utilería de graficación es útil para encontrar la inversa de una matriz cuadrada (véase Sec. A.7, Ap. A).

EJEMPLO 1 Utilizar una utilería de graficación para hallar la inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Primero se introduce la matriz dada como la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego, al recuperar la matriz A y utilizar la tecla x^{-1} , se tiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 1.3 & -1.1 & -0.7 \\ -0.6 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS

En los ejercicios 1-4, refiérase a las siguientes matrices y utilice una utilería de graficación o un programa de computadora para encontrar la inversa de la matriz. Exprese sus respuestas con una precisión de dos cifras decimales.

1. $\begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -2.1 \\ 3.4 & 2.6 & 7.3 \\ -1.2 & 3.4 & -1.3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1.1 & 2.3 & 3.1 & 4.2 \\ 1.6 & 3.2 & 1.8 & 2.9 \\ 4.2 & 1.6 & 1.4 & 3.2 \\ 1.6 & 2.1 & 2.8 & 7.2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2.1 & 3.2 & -1.4 & -3.2 \\ 6.2 & 7.3 & 8.4 & 1.6 \\ 2.3 & 7.1 & 2.4 & -1.3 \\ -2.1 & 3.1 & 4.6 & 3.7 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4.2 & 3.7 & 4.6 \\ 2.1 & -1.3 & 2.4 \\ 1.8 & 7.6 & -2.3 \end{bmatrix}$

Capítulo 5
Resumen de
las principales
fórmulas y términos

Fórmulas

Leyes para la suma de matrices:

Ley conmutativa

$$A + B = B + A$$

Ley asociativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Leyes para la multiplicación de matrices:

Ley asociativa

$$(AB)C = A(BC)$$

Ley distributiva

$$A(B + C) = AB + AC$$

Inversa de una matriz 2×2

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{y } D = ad - bc \neq 0,$$

$$\text{entonces } A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Solución del sistema $AX = B$
 (A no singular)

$$X = A^{-1}B$$

Términos

Parámetro

Matriz, matrices

Sistema dependiente

Matriz renglón

Sistema inconsistente

Matriz columna

Sistema equivalente

Matriz cuadrada

Matriz de coeficientes

Transpuesta de una matriz

Matriz aumentada

Escalar

Forma reducida por renglones de una matriz

Producto por un escalar

Operaciones de renglón

Producto matricial

Columna unitaria

Matriz identidad

Pivoteo

Inversa de una matriz

Método de eliminación de Gauss-Jordan

Matriz singular

Tamaño de una matriz

Capítulo 5 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1-4 realice la operación, de ser posible.

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3. [-3 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre los valores de las variables en los ejercicios 5-8.

$$5. \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 2 \\ 3 & w \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 3 & a+3 \\ -1 & b \\ c+1 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ e+2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ 0 & y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & z \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 9-16 calcule la expresión, de ser posible, dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$9. 2A + 3B$$

$$10. 3A - 2B$$

$$11. 2(3A)$$

$$12. 2(3A - 4B)$$

$$13. A(B - C)$$

$$14. AB + AC$$

$$15. A(BC)$$

$$16. (\frac{1}{2})(CA - CB)$$

En los ejercicios 17-23, resuelva el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$17. 2x - 3y = 5$$

$$18. 3x + 2y = 3$$

$$3x + 4y = -1$$

$$2x - 4y = -14$$

$$19. x - y + 2z = 5$$

$$20. 3x - 2y + 4z = 16$$

$$3x + 2y + z = 10$$

$$2x + y - 2z = -1$$

$$2x - 3y - 2z = -10$$

$$x + 4y - 8z = -18$$

$$21. 3x - 2y + 4z = 11$$

$$2x - 4y + 5z = 4$$

$$x + 2y - z = 10$$

$$22. x - 2y + 3z + 4w = 17$$

$$2x + y - 2z - 3w = -9$$

$$3x - y + 2z - 4w = 0$$

$$4x + 2y - 3z + w = -2$$

$$23. 3x - 2y + z = 4$$

$$x + 3y - 4z = -3$$

$$2x - 3y + 5z = 7$$

$$x - 8y + 9z = 10$$

Encuentre la inversa de la matriz (si ésta existe) en los ejercicios 24-31.

$$24. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$25. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$26. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$27. A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$28. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$29. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$30. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$31. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 32-35 calcule la expresión, de ser posible, dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$32. (ABC)^{-1}$$

$$33. (A^{-1}B)^{-1}$$

$$34. (A + B)^{-1}$$

$$35. (2A - C)^{-1}$$

En los ejercicios 36-39, escriba cada sistema de ecuaciones lineales en la forma $AX = C$. halle A^{-1} y utilice el resultado para resolver el sistema.

$$36. x - 3y = -1$$

$$2x + 4y = 8$$

$$37. 2x + 3y = -8$$

$$x - 2y = 3$$

$$38. 2x - 3y + 4z = 17$$

$$x + 2y - 4z = -7$$

$$3x - y + 2z = 14$$

$$39. x - 2y + 4z = 13$$

$$2x + 3y - 2z = 0$$

$$x + 4y - 6z = -15$$

40. El señor Sumano compró 10 000 acciones de la compañía X, 20 000 de la compañía Y y 30 000 de la compañía Z a un precio unitario de \$20, \$30 y \$50 por acción, respectivamente. Seis meses después, los precios de cierre de X, Y y Z eran \$22, \$35 y \$51 por acción. Sumano no realizó otras transacciones en el periodo en cuestión. Compare el valor de las acciones del inversionista en el momento de su adquisición y seis meses después.

41. La señora Newburg opera tres estaciones de autoservicio de gasolina en diferentes partes de la ciudad. Cierta

día, la estación A vendió 600 galones de premium, 1000 galones de regular, 800 galones de super sin plomo y 1400 galones de regular sin plomo; la estación B, 700 galones de premium, 800 galones de regular, 600 galones de super sin plomo y 1200 galones de regular sin plomo; la estación C, 1200 galones de premium, 800 galones de regular, 1000 galones de super sin plomo y 900 galones de regular sin plomo. Si el precio de la gasolina ese día fue de \$1.60 el galón de premium, \$1.20 el galón de regular, \$1.50 el galón de super sin plomo y \$1.30 el galón de regular sin plomo, utilice el álgebra matricial para hallar el ingreso total en cada estación.

42. La compañía petrolera Wildcat tiene dos refinerías, una en Houston y otra en Tulsa. La refinería de Houston envía 60% de su petróleo a un distribuidor en Chicago y 40% a un distribuidor en Los Ángeles. La refinería de Tulsa envía 30% de su petróleo al distribuidor en

Chicago y 70% al distribuidor en Los Ángeles. Si durante un año el distribuidor de Chicago recibió 240 000 galones de petróleo y el distribuidor de Los Ángeles recibió 460 000 galones, ¿cuál fue la cantidad de petróleo producido en cada refinería de Wildcat?

43. La joyería Gralico quiere producir tres tipos de pendientes: el tipo A, el B y el C. Para fabricar un par de pendientes del tipo A se necesitan 2 minutos en las máquinas I y II y 3 minutos en la máquina III. Un par de pendientes del tipo B necesita 2 minutos en la máquina I, 3 minutos en la máquina II y 4 minutos en la máquina III. Un par de pendientes del tipo C precisa 3 minutos en la máquina I, 4 minutos en la máquina II y 3 minutos en la máquina III. Hay 3 horas disponibles en la máquina I, 4 horas en la máquina II y 5 horas en la máquina III. ¿Cuántos pendientes de cada tipo debe fabricar Gralico para aprovechar todo el tiempo disponible?

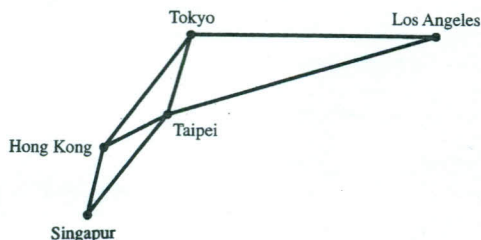
Capítulo 5 Problemas y proyectos ampliados

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Halle A^{-1} .
 - Encuentre la condición necesaria para que A sea no singular.
 - Compruebe que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. La figura 8 muestra las rutas de una línea aérea internacional que une cinco ciudades. Una línea que une dos ciudades indica que existe un vuelo directo entre ellas.

FIGURA 8



Esta información se puede representar mediante la matriz

	Singapur	Hong Kong	Taipei	Tokio	L.A.
Singapur	0	1	1	0	0
Hong Kong	1	0	1	1	0
Taipei	1	1	0	1	1
Tokio	0	1	1	0	1
L.A.	0	0	1	1	0

donde $a_{ij} = 1$ indica que hay un vuelo directo entre las ciudades i y j , y $a_{ij} = 0$ indica que no existe un vuelo directo entre tales ciudades.

- Calcule A^2 .
- Consulte la figura y compruebe que la entrada a_{ij} de A^2 representa el número de rutas con una escala entre las ciudades i y j .